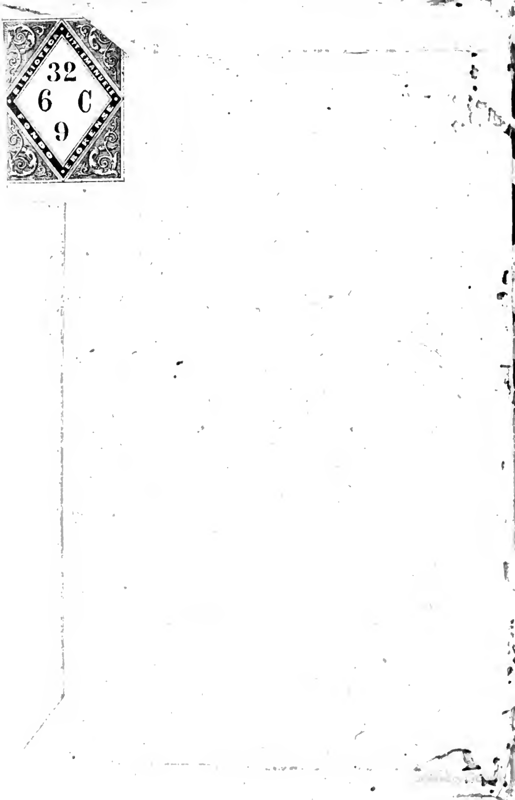




TRATTATO
DI ALGEBRA
RIDOTTA
IN ARITMETICA
IN DUE PARTI DIVISO.

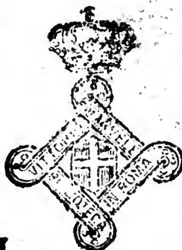
TRATTATO
DI ALGEBRA
RIDOTTA
IN ARITMETICA
IN DUE PARTI DIVISO

NELLA PRIMA PARTE

Si dimostra con gran chiarezza l'Algebra, e la medesima viene spiegata, e ridotta in Aritmetica parte per parte.

NELLA SECONDA

Si dimostrano, e si spiegano con ugual chiarezza alcuni Elementi di Euclide, i quali rappresentano le maravigliose Proprietà de' numeri, e che dall'Autore della presente Opera giudicansi a proposito per giungere ad una cognizione più adequata non meno che rigorosa della Geometria.



IL TUTTO COMPOSTO

DA MARIA SCARLATTI ROMANA.



IN ROMA 1781.
Nella Stamperia di Paolo Giunchi.

Con licenza de' Superiori.

A' GIOVANI
STUDIOSI.



SE le umane azzioni, *Degniſſimi Giovani*, ſempre per buone, e lodevoli ſono ſtate riputate, quando hanno avuto per loro fine coſa alcuna, che buona, e lodevole ſia ſtata da

ciascheduno giudicata ; e se quanto più il fine è lodevole, di tanto maggior lode esse meritevoli si ritrovano: di grandissima stima presso ciaschedun di *Voi* merita ragionevolmente che sia questa, quantunque non voluminosa, ma breve, e compendiosa Operetta, la quale ho raccolto, e messo insieme ad utilità di *Voi tutti*, che delle belle Arti, e de' buoni studj siete sopra modo amantissimi, e particolarmente delle Matematiche, e che perciò mi assicuro di presentarvela, non diffidandomi del vostro buon animo in accettarla, anzi in certa maniera lusingandomi, che a nessun di *Voi* debba dispiacere, ma che da tutti possa essere con lieto animo ricevuta, e non meno grata, ed accetta,

che lodata, ed approvata. Imperciocchè sovente meco stessa considerando, e nella mia mente rivolgendo quanto tra tutte le ritrovate Scienze, e da infiniti Uomini negli antichi Secoli, e ne' presenti ancora possedute, la più difficile, la più oscura, e ad apprendersi molto laboriosa fosse la Matematica, e conseguentemente lo studio de' Calcoli letterali, che altrimenti viene da' Professori di esso, collo specioso, e barbaro nome di Algebra appellato; e dall'altra parte molto ben conoscendo, che per cagione della suddetta difficoltà molti, che desiderosi di apprenderla, a prima vista (d' innanzi agli occhj loro parandosi una supposta impossibilità di potere al da loro bramato desiderio pervenire)

 at-

atterriti, e confusi rimanendo, ed in un istante le loro concepite speranze vergognosamente abbandonando, si rivolgono in dietro: perciò per benefizio di Voi, e di coloro tutti, che di apprenderla son desiderosi, mi sono indotta a non lasciar in dietro alcun tentativo, a provarmi di molto facile, e piana render questa via, e da essa ogni, benchè minimo, intoppo torre, e levare ogni ostacolo, sicchè possiate, o *studiosi Giovani* per questa francamente correre, non che camminare, e lietamente giungere alla meta de' vostri lodevolissimi desiderj. Per tanto mi sono ingegnata, quanto dalle mie deboli forze conceduto mi fu, di chiaramente, e con esquisita dilucidazione, e con nuovo, e facil

Meto-

Metodo, e maniera dichiarare, che cosa sieno i Calcoli letterali, e spiegare l'Algebra tutta da me ridotta in Aritmetica, togliendo dal suo volto quel grosso velo, che prima agli occhi di molti occulta, ed incognita la rendeva: e di più con molta chiarezza dilucidare alcuni Elementi di Euclide, acciocchè facile, e piana rimanendo la strada, per poter giungere all' Intelligenza delle Matematiche, possiate, mediante questa al possesso di tutte le altre Scienze pervenire, delle quali io son persuasa esser Voi, *Degnissimi, e lodevolissimi Giovani*, bramosi di farne acquisto. Accettate dunque con lieta faccia, e con benigno animo questa picciola Offerta, ed insieme con questa la mia retta intenzione di gio-

varvi: mentre io grata alla vostra gentilezza, e cortesia, non cesserò di pregarvi tutte quelle felicità, che il vostro cuore sà desiderare.

L' AU-

L'AUTORE A CHI LEGGE.



I già molti Autori hanno scritto, e dimostrato abbastanza l'antichità dell' Aritmetica; sicchè sarebbe superfluo che io ora lo ripetessi.

Dico bene che non senza ragione Platone nel Libro Settimo de Republica chiama l' Aritmetica, *Portico delle Scienze*, perchè certamente colla trattazione de' numeri l' animo nostro si rende assuefatto alle più difficili Speculazioni, ed in maravigliosa maniera si prepara a ricevere tutte le altre Scienze: anzi dalla stessa forza del numero si augura un fausto, e felice progresso alle altre discipline. Gli Uomini, dice Egli, per natura Aritmetici sembra essere di grande acutezza per le altre dottrine. E senza più prolongarmi; dico, che essendo tanto necessaria detta Scienza nell' uman commercio; con tutto ciò da molti s'impara per quanto portano le prime Regole di Abbaco; ma pochi sono quelli, che passano più oltre.

In

In molto minor numero sono quelli che si applicano allo studio delle Matematiche, e conseguentemente a quello dell' Algebra, sù della quale ho composto la prima parte di questo mio Volume, avendo sol di mira farne le Dimostrazioni in lettere, e di poi spiegarle in Aritmetica volgare, o sia in numeri, in una maniera così facile, acciò qualunque Persona che desideri possedere tali facoltà possa, anche senza Maestro giungerne all' acquisto.

E per esser questo Studio communemente necessario, e gli Assiomi in quella contenuti verità incontrastabili; mi è parso bene nella Seconda Parte di questo mio piccolo Volume spiegare con chiarezza alcuni Elementi di Euclide, i quali sono molto a proposito per giungere alla cognizione della Geometrìa, e perfezionarsi nell' Aritmetica.

La mia Penna non può arrivare ad esprimere quanto la Cognizione di queste Scienze sia giovevole per arrivare al conseguimento di altre, quasi dico, innumerabili.

Mi sono indotta a fare questa Ope-

retta così chiara, ed intelligibile da tutti, acciò niuno più si spaventi nel voler imparare coteste Scienze col dubbio di accingersi ad una Impresa troppo ardua. Ma priego il benigno Lettore a voler sbandire dalla mente tali pensieri, assicurandolo che in brieve tempo si troverà in possesso di queste Scienze quasi, dico, senza accorgersene. Così ancora non si maravigli chiunque, se nel Corso di questa Opera troverà qualche termine fuori dell' uso mattematico, servendomi di qualche termine alquanto volgare: ma sappia ciò non essere stato fatto per caso, ma solamente a sol fine di essere con maggior facilità inteso da chi non è versato in queste Scienze.

E siccome non si finirebbe mai di perorare sopra dette Erudizioni, spero con l'ajuto del Signor Iddio di proseguirne la Spiegazione in altro Volume, che darò alla luce in appresso, sempre però in modo facile, di maniera che, come poco anzi ho detto, ognuno possa da se medemo imparare.

Dal canto mio ho fatto, e farò quanto

to posso col mio debole Intelletto (stante che il sesso Imbelle, nel quale anchè Io mi trovo, per l'Ordinario non suol produrre Talenti così rari, acuti, e perspicaci da potersi paragonare con quelli di Persone di sesso virile) per far sì che ciascheduno possa con agevolezza da se medemo capire, e rendersi posseffore di Scienze sì utili, belle, e vantaggiose.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F. A. Marcucci ab Immac. Conception. Episc. Montis-Alti Vicesg.

IM-

IMPRIMATUR,

Fr. Pius Thomas Schiara Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apostolici Magister.

INDICE

Di tutto ciò che si contiene nel presente Volume,

PARTE PRIMA.

Dell' Algebra, o sia Calcolo litterale ridotto in Aritmetica. Pag. 1.
Maniera di Sommare le quantità Algebriche. 3.
Sottrazione delle Quantità Algebriche. 6.
Regole da saperfi per la moltiplicazione Algebrica. 7.
I segni simili fanno più, i segni diversi fanno meno. ivi.
I Coefficienti si moltiplicano come nell' Aritmetica, e gli esponenti si Sommano. ivi.
Moltiplicazione delle Quantità Algebriche. 8.
Divisione delle quantità Algebriche. 20.
Maniera di estrarre la Radice sì Quadrata, che Cubica. 24.
Delle Proporzioni in generale. 31.
Due Ragioni uguali ad una terza sono uguali trà di loro. 36.
Se si divide il maggior termine di una ragione per lo minore, si può mettere il prodotto del Quoziente, o dell' Esponente per termine minore in luogo del maggiore. 37.
Delle Proporzioni, e Progressioni Aritmetiche. 40.
Nella Proporzione Aritmetica l'Antecedente più,

 o me-

o meno la differenza è uguale al Conseguente. ivi.
Nella Proporzione Aritmetica la Somma degl' Estremi è uguale à quella de' Medj. ivi.
Conosciuti i primi termini di una Proporzione Aritmetica trovare il quarto. 41.
Trovare un medio proporzionale Aritmetico tra due termini noti. ivi.
Delle Proporzioni Geometriche. 44.
In una proporzione Geometrica il prodotto degli Estremi è uguale al prodotto de' Medj. 45.
Se quattro quantità sono disposte di maniera che il prodotto degli Estremi sia uguale al prodotto de' Medj, elleno sono proporzionali. 48.
Delle Progressioni Geometriche. 51.
Nella Progressione ∺ a. b. c. d. e. il prodotto del termine che precede per l' Esponente, è uguale al termine che siegue. 52.
Il secondo termine è uguale al prodotto del primo per l' esponente, il terzo al prodotto del primo per lo quadrato dell' esponente: il quarto al prodotto del primo per lo cubo &c. 53.
Delle Ragioni composte. 54.
Delle Frazzioni. 59.
Sommare delle Frazzioni. 61.
Sottrarre delle Frazzioni. 62.
Moltiplicazione delle Frazzioni. 63.
Dividere delle Frazzioni. ivi.
Dell' Equazioni. 66.
Per disimpegnare un incognita colla Somma, colla Sottrazione, ovvero coll' una, e coll' altra. 70.
Osservazioni sopra l' Analisi. ivi.

Se

Se si divide 100 in due quantità, delle quali la Differenza sia 40, quali saranno queste due quantità. 72.

PARTE SECONDA.

Elementi di Euclide, i quali rappresentano le Proprietà de' Numeri. 75.

Se proposti due numeri inuguali si levi sempre il minore dal maggiore con certa scambievole detrazzione, nè mai il restante misuri il precedente fintantoche non si sia pervenuto all' unità, quei numeri proposti da principio saranno primi fra di loro. 85.

Dati due numeri non primi fra di loro, ritrovare la massima commune misura di quelli. ivi.

Dati tre numeri non primi fra di loro, ritrovare la massima loro commune misura. 86.

Ogni numero il minore del maggiore è parte, o parti d' ogni numero. ivi.

Se un numero sarà parte di un numero, ed un altro numero sarà la medesima parte di un altro numero; l' uno, e l' altro insieme sarà la medesima parte dell' uno, e dell' altro, la quale è di un solo. 87.

Se il numero sarà parti del numero, un altro numero sarà le medesime parti di un altro numero, ancora l' uno e l' altro insieme saran le medesime parti dell' uno, e dell' altro insieme, le quali sarà uno di uno. 88.

Se un numero sarà parte del numero quale il tolto dal tolto, ancora il restante sarà la medesi-

desima parte del restante, quale il tutto dal tutto. 89.
Se un numero sarà parti di un numero, quale il tolto dal tolto: ancora il restante sarà le medesime parti, quali il tutto del tutto. ivi.
Se il numero sarà parte del numero, e un altro sarà la medesima parte di un altro: ancora scambievolmente quella parte, o parti, che sarà il primo del terzo, la medesima parte, o le medesime parti sarà il secondo del quarto. 90.
Se un numero sarà parti del numero, ed un altro numero sarà le medesime parti di un altro numero, ancora vicendevolmente quelle parti, o parte che è il primo del terzo, le medesime parti, o parte sarà il secondo del quarto. 91.
Se sarà come il tutto al tutto, così il tolto, parimente il rimanente sarà al rimanente come, il tutto al tutto. ivi.
Se sono quanti si voglia numeri proporzionali, come sarà l' uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti saranno a tutt' i conseguenti. 92.
Se vi sono quattro numeri proporzionali, ancora saranno proporzionali scambievolmente. 93.
Se vi sono quanti si voglia numeri, ed altri uguali a quelli in moltitudine, i quali si prendono a due a due nella medesima ragione: saranno ancora nella medesima ragione per l'ugguaglianza. ivi.
Se l' unità misura qualche numero ugualmente, poi un altro numero misuri qualche altro numero

mero

mero ancora a vicenda ugualmente ; l' unità misurerà il terzo numero , il secondo , ed il quarto . 94.

Se due numeri vicendevolmente frà di loro moltiplicandosi produrranno alcuni , i prodotti da loro saranno uguali frà di se . 95.

Se un numero moltiplicando due numeri ne formerà alcuni , i prodotti da questi avranno la medesima ragione che i moltiplicati . ivi.

Se due numeri moltiplicando qualche numero produrranno alcuni , i prodotti da questi avranno la medesima ragione che i numeri moltiplicati . 96.

Se quattro numeri saranno proporzionali , quel numero , il quale si forma dal primo , e dal quarto sarà uguale a quello , il quale si forma dal secondo , e dal terzo ; E se quel numero il quale si fa dal primo , e dal quarto sarà uguale a quel numero il quale si fa dal secondo , e dal terzo , essi quattro numeri saranno proporzionali . 97.

Se tre numeri saranno proporzionali , quello , che è contenuto , negli Estremi è uguale a quello , ch' è fatto dal Medio : e se quello , che è contenuto negli Estremi sarà uguale a quello che è descritto dal Medio , Essi tre numeri saranno proporzionali . 98

I numeri minimi di tutti quelli , che hanno la medesima ragione con loro , misureranno ugualmente i numeri , che hanno la medesima Ragione con quelli , il maggiore il maggiore , il minore il minore . 99.



Se ſaranno tre numeri, ed altri uguali ad eſſi in moltitudine, i quali ſi pigliano a due a due nella medeſima ragione, ſia perturbata la loro proporzione, ancora per ugualità ſaranno nella medeſima Ragione. 100.

Se vi ſono quattro numeri proporzionali, ancora per ragione inverſa, o Convertendo *ſaranno proporzionali.* 101.

Se i numeri compoſti ſono proporzionali queſti ancora diviſi ſaranno proporzionali. 102.

Se i numeri diviſi ſono proporzionali, queſti ancora compoſti ſaranno proporzionali. ivi.

Se i numeri compoſti ſono proporzionali, queſti ancora per converſione di ragione ſaranno proporzionali. 103.

I primi numeri tra di ſe ſono minimi di tutti quelli che hanno la medeſima ragione con loro. ivi.

I numeri minimi di tutti quelli, che hanno la medeſima ragione fra di loro ſono primi fra di ſe. 104.

Se ſaranno due numeri primi fra di ſe quel numero che miſurerà uno di loro ſarà primo all' altro. ivi.

Se due numeri ſaranno primi riſpetto ad alcuno, ancora il generato da quello ſarà primo riſpetto al medeſimo. 105.

Se due numeri ſaranno primi tra di ſe, ancora il generato da uno di loro ſarà primo riſpetto all' altro. ivi.

Se due numeri ſaranno primi riſpetto a due altri, l' uno, e l' altro, all' uno, ed all' altro, an-

cora

cora quelli che saranno generati tra loro saranno primi tra di se. 106.

Ogni primo numero è primo rispetto ad ogni numero che non misura. ivi.

Se saranno due numeri primi tra di se, e l'uno, e l'altro moltiplicando sestesso abbia fatto un altro, ancora i generati da questi saranno primi tra di se: e se quelli, che in principio moltiplicando essi generati avranno fatto alcuni altri, ancora questi saranno primi tra di se, e questo sempre accade circa gli Estremi. 107.

Se due numeri saranno primi tra di se, ancora l'uno e l'altro insieme sarà primo a qualsivoglia di loro: e se l'uno e l'altro insieme sarà primo rispetto ad alcuno di quelli, ancora quei numeri posti in principio saranno primi tra di se. 108.

Se due numeri moltiplicandosi tra di se formano un altro, ed il formato da questi sia misurato da alcun primo numero, questo ancora misurerà un di quelli, i quali sono posti in principio. ivi.

Ogni numero composto lo misura qualche primo numero. 109.

Ogni numero o è primo, o lo misura qualche numero primo. ivi.

Se due numeri misurano qualche numero, ancora un numero minimo misura quel medesimo che misurano quelli. 110.

Se alcun numero misurerà un numero quello il qua-

quale misura, avrà la parte denominata del misurante. ivi.
Se un numero avrà qualsivoglia parte, lo misurerà un numero denominato dalla parte. 111.
Se saranno quanti si voglia numeri di seguita proporzione, e gli Estremi poi di essi sieno primi tra di se, essi sono minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proporzione con loro. 112.
Ritrovare numeri minimi di seguita proporzione quanti si vogliano. ivi.
Se sieno quanti si voglia numeri di continua proporzione minimi di tutti quelli, che hanno la medesima ragione con loro, gli Estremi di quelli sono primi fra di se. 113.
Date quante si voglia ragioni nei numeri minimi, ritrovare numeri minimi continuati nelle date ragioni. ivi.
I numeri piani hanno ragione composta tra di se dai lati. 114.
Se vi sieno quanti si voglia numeri continuati proporzionali, ed il primo non misuri il secondo, nè anche alcun altro misurerà nessuno. 115.
Se sieno quanti si voglia numeri continuati proporzionali, il primo poi misuri l'Estremo, questo ancora misurerà il secondo. 116.
Se tra due numeri accaderanno numeri medj di continua proporzione, quanti numeri medj di continua proporzione, cadono tra quelli altrettanti Medj di continua proporzione caderanno tra gli altri che hanno la medesima ragione con quelli. ivi.
Se

Se due numeri sieno tra di se primi, e tra quelli caderanno numeri Medj di continua proporzione, quanti numeri Medj di continua proporzione caderanno tra quelli, altrettanti Medj di continua proporzione caderanno tra l' uno, e l' altro di loro, e l' unità. 117.

Se tra due numeri e l' unità caderanno numeri di continua proporzione quanti Medj numeri di continua proporzione caderanno tra l' uno e l' altro di loro, e l' unità, altrettanti Medj di continua proporzione caderanno fra essi. 118.

Di due numeri quadrati vi è un numero medio proporzionale, ed il quadrato al quadrato ha dupplicata ragione del lato al lato. 119.

Di due numeri cubi vi sono due numeri Medj proporzionali, e il cubo al cubo ha triplicata ragione di lato al lato. 120.

Se sieno quanti si voglia numeri di continua proporzione ciascheduno moltiplicando sestesso faccia alcuni altri quelli che saranno prodotti da quelli saranno proporzionali: E se i numeri posti in principio moltiplicando i già fatti faranno altri, Essi ancora saranno proporzionali: e sempre questo accaderà circa gli Estremi. 121.

Se il numero cubo misurerà un altro numero cubo, ancora il lato dell' uno misurerà il lato dell' altro: e se il lato dell' uno cubo misura il lato dell' altro, ancora il cubo misura il cubo. 122.

Se il numero quadrato non misura il numero quadrato; nè anche il lato di uno misurerà il lato dell' altro: e se il lato di un quadrato

non

non misuri il lato dell' altro nè anche il quadrato misurerà il quadrato . 123.

Se il numero cubo non misura il numero cubo, nè anche il lato di uno misura il lato dell' altro : e se il lato di un cubo non misura il lato dell' altro nè anche il cubo misurerà il cubo . ivi.

Di due numeri piani simili un numero medio è numero proporzionale : ed un piano all' altro piano ha duplicata ragione del lato corrispondente al lato corrispondente . 124.

Di due numeri solidi simili sono proporzionali due numeri Medj , ed il solido al solido ha triplicata ragione del lato corrispondente al lato corrispondente. 125.

Se tra due numeri caderà un numero medio proporzionale , quelli numeri saranno piani simili . 126.

Se tra due numeri cadono due Medj proporzionali , quei numeri sono solidi simili . 127.

Se tre numeri sono continui proporzionali ed il primo è quadrato , ancora il terzo sarà quadrato . 128.

Se quattro numeri sieno continuamente proporzionali , il primo poi sia cubo , ed il quarto sarà cubo . ivi.

Se due numeri hanno tra di se quella ragione che passa tra un numero quadrato ad un numero quadrato , ed il primo sia quadrato , anche il secondo sarà quadrato . 129.

Se due numeri hanno tra di se quella ragione che passa tra cubo e cubo , ed il primo sia cu-

cubo, anche il secondo sarà cubo. 130.
I numeri piani simili hanno tra di se quella ragione la quale ha il numero quadrato al numero quadrato. 131.
I numeri solidi simili hanno tra di se quella ragione che passa tra cubo e cubo. 132.
Se due simili piani numeri scambievolmente moltiplicandosi facciano un altro, il prodotto sarà quadrato. 133.
Se due numeri scambievolmente moltiplicandosi fanno un quadrato, questi numeri saranno piani simili. 134.
Se un numero cubo moltiplicando sestesso forma qualche numero, il prodotto sarà cubo. ivi.
Se un numero cubo moltiplicando un altro numero cubo farà qualche numero, il fatto sarà numero cubo. 135.
Se un numero cubo moltiplicando qualche numero fa un cubo: ancora il moltiplicato sarà cubo. 136.
Se un numero moltiplicando sestesso farà un cubo, ancora esso sarà cubo. ivi.
Se un numero composto moltiplicando qualche numero formerà un altro, il fatto sarà solido. 137.
Se saranno dall'unità in poi quanti si voglia numeri continui proporzionali, il terzo certamente dall'unità è quadrato, e uno intermettente tutti: il quarto poi è cubo, e due intermettente tutti: il settimo anche è cubo, ed insieme è quadrato, e cinque intermettente tutti. 138.
Se dall'unità vi saranno quanti si voglia numeri

continui proporzionali, e quello appresso l'unità sia quadrato, ancora tutti gli altri saranno quadrati: ma se quello appresso l'unità sia cubo, anche tutti gli altri saranno cubi. 139.

Se dall'unità vi saranno quanti si vogliano numeri continui proporzionali, e quello appresse l'unità non sia quadrato, nè anche alcun altro sarà quadrato fuori che il terzo dall'unità, e tutti intermettenti uno: e se quello appresso l'unità non sia cubo, neppure alcun altro sarà cubo, fuori che il quarto dall'unità e due intermettenti tutti. 140.

Se dall'unità vi saranno quanti si voglia numeri continui proporzionali, il minore misura il maggiore per qualcheduno di quelli, i quali sono nei numeri proporzionali. 141.

Se dall'unità saranno quanti si voglia numeri continui proporzionali, qualunque de' primi numeri misurino l'ultimo, i medesimi ancora misureranno quello ch'è prossimo all'unità. 142.

Se dall'unità saranno quanti si voglia numeri continui proporzionali, e quello ch'è appresso l'unità sia primo, niun altro misurerà il numero massimo, fuorchè quelli che sono nei numeri proporzionali. 143.

Se un minimo numero lo misurano numeri primi, nessun altro numero primo misurerà quello, fuorchè quelli che da principio lo misuravano. 144.

Se tre numeri continui proporzionali saranno minimi di tutti quelli che hanno la medesi-

ma

ma ragione con essi qualsivoglia due composti, saranno primi all' altro. 145.
Se due numeri saranno primi tra di se, non sarà come il primo al secondo, così il secondo ad alcun altro. 146.
Se saranno quanti si voglia numeri continui proporzionali, gli estremi di loro sieno primi tra di se, non sarà come il primo al secondo così l' ultimo ad alcun altro. ivi.
Dati due numeri considerare se si può ritrovare il terzo numero proporzionale ad essi. 147.
Dati tre numeri considerare se si può ritrovare il quarto numero proporzionale ad essi. 148.
I primi numeri sono molti, proposta tutta la moltitudine de' numeri primi. 149.
Se si compongono qualunque numeri pari, il tutto sarà paro. ivi.
Se si compongono quanti si voglia numeri impari, e la moltitudine di loro sia pari, il tutto sarà pari. 150.
Se si compongono quanti si voglia numeri impari, e la moltitudine di essi sia impara, il tutto sarà imparo. ivi.
Se dal numero paro si leva il paro, il resto sarà paro. 151.
Se dal numero imparo si leva un numero imparo il restante sarà paro. ivi.
Se da un numero paro si leva un numero imparo, ancora il resto sarà imparo. 152.
Se un numero imparo moltiplica un numero paro, il fatto sarà paro. ivi.
Se un numero imparo moltipticando un numero

mero imparo farà un altro, il fatto farà imparo. 153.
Se un numero imparo misura un numero paro, ancora misurerà la metà di quello. ivi.
Se un numero imparo sarà primo rispetto a qualche numero, ancora sarà primo rispetto al doppio di quello. 154.
Dei numeri dupli incominciando dal binario ciascheduno è solamente parò paro. ivi.
Se un numero abbia la metà impara sarà solamente paro imparo. 155.
Se un numero paro non sia duplo del binario, ne abbia la metà impara, allora è paro paro, ed è paro imparo. ivi.
Se sieno quanti si voglia numeri continui proporzionali, si levino poi dal secondo. e dall' ultimo uguali ad esso primo: sarà come l'eccesso del secondo al primo, così l' eccesso dell' ultimo a tutti gli antecedenti ad esso. 156.
Se quanti si voglia numeri dall' unità si espongono continui in doppia proporzione, fintantoche tutto il numero composto si faccia primo, e tutto questo in ultimo moltiplicato faccia un altro, il fatto sarà perfetto. 157.
La parte è grandezza di grandezza, minore della maggiore, quando la minore misura la maggiore. 158.
La parte maggiore dicesi moltiplice della minore, quando la minore misura la maggiore. 159.
La ragione è una certa abitudine scambievo-

le del medesimo genere rispetto alla quantità. 160.
La proporzione è una similitudine di ragioni. 161.
Delle Divisioni delle Proporzioni. 163.
Delle Proporzionalità. 165.
Delle Proporzionalità Aritmetiche. 166.
Delle Proporzionalità Geometriche. 174.

FINE DELL' INDICE.

PAR-



PARTE PRIMA.

Dell' Algebra, o sia Calcolo litterale ridotto in Aritmetica.



'Algebra è Aritmetica litterale, o sia Calcolo litterale, dove si comprendono i Numeri, e le Quantità positive, e negative; perchè con poche lettere si può esprimere qualunque quantità numerica. Si chiama Quantità, o Grandezza quella che può essere accresciuta, o diminuita come: *a*, *b*, *c*, *d*, &c. che saranno impiegate per esprimere ciascheduna le sue quantità: imperocchè colle lettere si esprimono le quantità Algebriche, o litterali.

Le dette quantità hanno i loro segni, e sono i seguenti $+$ significa più, $-$ significa meno, x significa moltiplicazione, : significa divisione, $=$ significa uguaglianza, $>$ significa maggiore, $<$ significa minore, ∞ segno dell' Infinito.

Le Quantità sono positive, e negative. Le quantità positive si notano col segno $+$: le

negative col ſegno $-$. Un ſoldo ve. gr. che ſi poſſiede ſi chiama quantità poſitiva; ſe poi al contrario uno ſia debitore di detto ſoldo, queſta chiamaſi quantità negativa, perchè diſtrugge quel che ſi poſſiede: così avendo un ſoldo, ed eſſendo di quello debitore, non ſi ha nulla, e non avendo nulla, ed eſſendo debitore di qualche coſa, ſi ha meno di nulla. Il nulla è riferito al Zero; ſicchè il Zero tra le grandezze poſitive, e le grandezze negative tiene il luogo di mezzo. Se ſi pone avanti ad una quantità il ſegno più, la detta quantità ſarà poſitiva: per eſempio $+a$. Quelle quantità ſegnate col ſegno $-$ ſono quantità negative: come foſſe $-a$. Se poi ſi nota una quantità ſenz' alcun ſegno avanti, ſi deve credere che abbia $+$, e ſi chiama poſitiva, come a. Queſti due ſegni $+$, e $-$ in queſto modo ſi diſtruggono $a-a=0$, $+2-2=0$.

Le quantità ſemplici incompleſſe, o monomie ſono quelle, che non ſono legate ad altre quantità con i ſegni $+$, ovvero $-$, come a, ab. Le compleſſe, o polinomie hanno le loro parti legate con queſti ſegni $a+b$, $ab-bc$.

Si chiamano termini le parti di una quantità compleſſa, le quali vengono diſtinte dai ſegni $+$, ovvero $-$; come a, e b ſono termini di $a+b$. La quantità che ha due termini ſi chiama *binomia*: ſe ha tre termini ſi chiama *trinomia*: ſe ha quattro termini *quadrimonia* &c. Quando poi coſta di un ſol termine ſi dice *monomia*.

In

In ogni termine si trova *Coefficiente*, ed *Esponente*. Coefficiente è quel numero, che si pone prima della lettera, come sarebbe $2a + 3b$; 2, e 3 si chiamano *Coefficienti*. Quel numero poi che si mette sopra la lettera si chiama *Esponente*: come per esempio $a^2 + b^3$, il 2., e 3. si chiamano esponenti, e vagliono lo stesso, che $aa + bbb$.

Le lettere si devono scrivere per ordine: come sarebbe a, b, c, d. e non b, a, c.

Si avverta finalmente che *Problema* vuol dire Raziocinio, che indrizza a fare qualche cosa prattica. Tanto il Problema, che il Teorema vengono significati col Vocabolo di Proposizione.

Analisi, o sia Calcolo litterale è la maniera di risolvere una grandezza, separarne le parti note dalle incognite, e in una parola far servire la cognizione delle une alla cognizione dell'altre coll' artificio dell' Equazioni.

PROBLEMA I.

Maniera di Sommare le quantità Algebriche.

PER sommare le quantità Algebriche si fa in questo modo. Le lettere devono conservare, per quanto sia possibile l'Ordine naturale dell' Alfabeto. Volendo sommare $a + b =$ à $4 + 6$. con $c + d = 2 + 8$. perchè il 4. lo riferiremo alla lettera a, il 6. alla lettera b; e similmente il 2. lo riferiremo al c, e l' 8. al d,

Dunque scrivo $a + b + c + d = 4. + 6. + 2. + 8. = 20.$ perchè sommati $4.\ 6., 2.\ 8.,$ formano 20. e l'Operazione è fatta.

Se poi le quantità fossero simili, come $2\,ab + 4\,cd$, o mescolate di termini simili come $2\,ab + 4\,cd + 4\,ab + 3\,cd$: allora si scrivono $6\,ab + 7.\,cd$ perchè si sommano i Coefficienti.

Per maggior chiarezza sia $ab = 4\ 6$ dunque 4.
$cd = 3\ 8$
via 6. fà 24., e 3. via 8. forma ancora 24. $2\,ab$, o sia due volte 24. forma 48., e $4\,ab$, o sia quattro volte 24. fa 96.

Dipoi cd quattro volte 24. torna a fare 96. e 3. cd tre volte 24. fanno 72. Dunque Somma

$2\,ab + 4\,cd$	$ab = 46. = 24.$		$48 + 96$
$4\,ab + 3\,cd$	$cd = 38. = 24.$		$96 + 72$
$6.\,ab + 7.\,cd$			$144 + 168$

Si deve avvertire, che i Segni simili fanno più: i Segni diversi fanno meno. Dunque più con più fà più: meno con meno fà più, e più con meno fa meno.

Ponghiamo un altro Esempio di Sommazione colli Coefficienti, e con gl' Esponenti.

$2\,a^2 + 4\,b^3$	$a = 8$	$128 + 108$
$4\,a^2 + 3\,b^3$	$b = 3$	$256 + 81$
$6\,a^2 + 7\,b^3$		$384 + 189$

Dunque due a coll' Esponente 2. il detto Esponente 2. significa *Quadrato*: sicchè abbiamo dato alla lettera a il valore di 8. che moltiplicato per se stesso; cioè quadrato forma 64.

E sic-

E ſiccome il Coefficiente è 2. che eſprime due volte il quadrato di a; o ſia due volte 64. che fa la Somma di 128.

Dunque l' altro a quadrato che tiene il Coefficiente 4. vale il doppio di 128. che fa la Somma di 256. le quali due Somme unite inſieme, o vogliam dire, ſommate fanno la Somma di 384.

Alla lettera b gl' abbiamo dato il valore di 3.; e ſiccome l' Eſponente è pure 3. che ſignifica b^3 cubo: dunque dobbiamo fare 3. via 3. fa 9. che il 9. è quadrato di 3.: poi 3. via 9. fa 27. imperocchè il 27. è il numero cubo del 3. In queſto eſempio abbiamo per coefficiente del b il numero 4., il quale indica che dobbiamo prendere quattro volte il b cubo, o ſia quattro volte il 27. che fa la Somma di 108. Dipoi l' altro b che tiene per Coefficiente il numero 3., e l' Eſponente ancora è il 3., come già abbiamo detto che ſignifica il cubo: Sicchè il 27. cubo di 3. tre volte come ci moſtra il Coefficiente 3. farà la Somma di 81., ſicchè ſommati inſieme 108., e 81. fanno 189. e queſta è la Somma dei due b cubi con il valore de' loro Coefficienti.

Quando l' Eſponente è diverſo, benchè le lettere ſieno ſimili, non ſi ſommano i termini: Ponghiamo un altro Eſempio.

$$\begin{array}{l} a^2 + b^3 \\ a^2 + b^2 \\ \hline 2a^2 + b^2 + b^3 \end{array}$$

Per seguitare come sopra, vale a dire, $a =$ 8 e $b =$ a 3: dunque due a quadrati, o sia due volte 64. fanno 128. $+ b^2$ o sia 3. quadrato fa 9. b^3 o sia 3. cubo forma 27. dunque $2a^2 + b^2 + b^3$ o sia 128. 9. e 27. che sommati insieme fanno 164.

PROBLEMA II.

Sottrazione delle Quantità Algebriche.

NElle Sottrazioni Algebriche s'invertono i Segni: dov'è $+$ si pone $-$, e vice versa dov'è $-$ si pone $+$ come lo dimostreremo cogli Esempi

$2 + b - c = 2 + 8 - 3 = 7.$ e qui dimostreremo questo Esempio con maggior chiarezza. Il 2. viene riferito all' a, 8. al b, 3. al c. dunque 2., e 8 fanno 10 $-$ 3.: da 10. togliamo 3. rimane 7.: e l'Operazione è fatta.

Nelle Quantità, che devonsi sottrarre, il segno del primo termine è sempre $-$. Negl'altri termini poi i segni s'invertono, come già abbiamo detto, dove $+$ $-$, e dove $-$ $+$.

$$\begin{array}{ll} 2a + 3.b + 2d & 2a + 3b + 2d \\ a + b + d & -a - b - d \\ & \overline{a + 2b + d} \end{array}$$

Per maggior chiarezza si ponga un altro Esempio. Se si vuol sottrarre $c + d = 4 + 6.$ da $a + b = 5. + 8.$ scrivo $a + b = 5. + 8.$
$- c - d = - 4 - 6 = 3.$

E qui

E qui si vede chiaramente che il 4. viene riferito al *c*, il 6. al *d* il 5. all'*a*, e l'8. al *b*. Dunque 5 + 8 fanno 13. e 4 + 6. fanno 10. e da 13 sottraendo 10. rimane 3. Ed ecco abbastanza dimostrata la Sottrazzione.

Regole da sapersi per la moltiplicazione Algebrica.

REGOLA I.

I Segni simili fanno più, i Segni diversi fanno meno.

REGOLA II.

I Coefficienti si moltiplicano come nell'Aritmetica, e gli Esponenti si Sommano.

IL segno della moltiplicazione nell' Algebra è questo (*x*), che volgarmente chiamasi *Croce di S. Andrea*, ed esprime la Congiunzione delle quantità da moltiplicarsi come $a \times b$ oppure ab senza a verun segno, che tanto l'uno, che l'altro significa *a* moltiplicato per *b* cioè *a* preso tante volte, quante ne esprime *b*: per esempio sia *a* uguale a 5., e *b* uguale a 3. dunque $a \times b$, o sia 5. x. 3. = 15., e le quantità, che danno i prodotti chiamansi *Radici*.

Per moltiplicare le grandezze semplici positive, o si uniscono col segno di moltiplicazione, o veramente senza segno intermedio, che insieme le unisca.

 Se

Se si vuole moltiplicare *a b* per *c d* si fà *a b* x *c d* o veramente *a b c d*. Egli è manifesto che una grandezza che ha il segno x moltiplicata per una che ha il Segno x dà un prodotto che ha il Segno x: poichè questo prodotto è una grandezza positiva presa tante volte, quante viene denotata da una grandezza positiva. Quindi ne viene questa prima Regola + più per + più da + più.

PROBLEMA III.

Moltiplicazione delle Quantità Algebriche.

PER moltiplicare una grandezza semplice positiva per una negativa, avanti al prodotto gli si pone il Segno −. Se si volesse moltiplicare *a* per − *b* si scrive − *a b*: imperocchè moltiplicare *a* per − *b* è lo stesso che prendere *a* tante volte meno quante volte ne significa *b*, ovvero sottrarre tante volte *a* quante ne esprime *b*; e volendo moltiplicare − *a* per *b* è prendere − *a* tante volte quante ne denota *b*. Quindi $a \times -b = -ab$, e $-a \times +b = -ab$: e perciò ne siegue la seconda regola + più per meno, o − meno per + più dà meno.

Se poi vogliamo moltiplicare una quantità semplice negativa per un' altra negativa, si pone il segno + innanzi al prodotto: volendo moltiplicare − *a* per − *b* si scrive + *a b*; imperocchè moltiplicare − 2. per − 1. è prendere − 2. − una volta: questo è sotttrarre − 2., o sia

o sia aggiungere, e ristabilire 2., e questo si fà col segno +.

E da ciò ne viene questa terza regola — meno per — meno dà + più.

Se moltiplicaremo a x $b = ab$ questo è un piano: Per più chiarezza ponghiamo che a fosse 4., e b fosse 6. moltiplicato 4. per 6. forma 24., e questo è un piano, ovvero un Rettangolo Algebrico ab x $c = abc$: e questo è un solido, perchè se all'a gli diamo 2. al b 3. al c 4. allora diremo due volte 3. fà 6; sei volte 4. fà 24. e questo è un solido, perchè ne nasce da tre numeri frà loro moltiplicati: e così ancora l'istessa Operazione costa nelle lettere, come abbiamo dimostrato.

a x $a = aa$ e questo è un quadrato, perchè significa un numero moltiplicato per se stesso: come se all'a si dasse il numero 8. che 8. moltiplicato per 8. fà 64. numero quadrato del 8. aa x $a = aaa$, e questo esprime un cubo; poichè abbiamo di già assegnato il numero 8. all'a: dunque 8. x 8. fa 64. numero quadrato di 8. di poi 64. x 8. fà 512. numero cubo di 8. e questo significa aa x $a = aaa$.

Resta sempre in nostra libertà di dare alle lettere quel numero che vogliamo, vale a dire quei numeri che ci bisognano per l'operazione che si vuol fare.

Qualunque grandezza lineare o di una dimensione, che vale a dire misura di una lettera a, ovvero b, o qualunque altra potendo esser accresciuta, o diminuita, è formata da un'

al-

altra sù la quale è immediatamente inalzata in una certa maniera, come sopra la sua radice. Questa elevazione chiamasi primo grado; perchè *a* inalzato alla prima potenza l'istesso *a* è prima potenza, o potenza lineare di *a*. *a a* quadrato di *a* è la seconda potenza. *a a a* è la terza potenza, *a a a a* la quarta potenza &c. ed in conseguenza a misura che si unisce la stessa grandezza ad essa medesima senza segno, essa cresce in potenza.

Per spiegare con più chiarezza. Grandezza lineare è qualunque numero che viene riferito a qualunque lettera, come nel nostro esempio. *a* posto che questo *a* fosse riferito al numero 5. allora il numero 5. è la prima potenza, o sia grandezza lineare: poi *a a* o sia *a* x *a* e la seconda potenza di *a* Dunque 5 5, o sia 5 moltiplicato per 5. che fà 25. e questa è la seconda potenza di 5. o sia quadrato di 5. E siccome *a a a* è la terza potenza di *a* così 5 5 5 è la terza potenza di 5. cioè a dire 5 moltiplicato per 5 fà 25. seconda potenza, e 25. moltiplicato per 5 fà 125. terza potenza di 5. ed ancora *a a a a* esprimono la quarta potenza di *a* così 5 5 5 5 esprimono la quarta potenza di 5. In questa maniera 5 moltiplicato per 5. fà 25. seconda potenza; 25. moltiplicato per 5. fà 125 terza potenza. così 125 moltiplicato per 5 fà la somma di 625. quarta potenza di 5. e così si può seguitare in Infinito.

Nelle grandezze litterali si può in vece di scrivere *a*. *a a*. *a a a*. *a a a a*. si può esprimere la potenza coll' Esponente come sarebbe

a^1,

a^1, a^2, a^3, a^4 &c. e questo può farsi ancora ne' numeri

Si trovano anche le prime potenze di molte dimensioni differenti, che sono formate dal prodotto di molte potenze di una dimensione come a^1, $b^1 = a\,b = a \times b$. Queste prime potenze sono grandezze lineari, ed ancora radici, le quali per dimostrarle più chiare diremo che a abbia il valore di 3. e b. di 4. Dunque 3 moltiplicato per 4 fà 12. e questo 3 4. sono grandezza lineari, e radici.

Le potenze più elevate possono esser considerate come il prodotto di altre potenze, così $a^4 = a^2 \times a^2$, $a\,b^4 = a^4 \times b^4 = a^2 b^2 \times a^2 b^2$ già abbiamo detto che all'a gli diamo il valore di 3. ed al b di 4. Dunque per inalzare a alla quarta potenza; come di già abbiamo spiegato, si fà 3 moltiplicato per 3 fà 9. seconda potenza di 3, e 3 via nove fà 27. terza potenza di 3, e tre volte 27 fà 81 quarta potenza di 3. dunque se 9 era seconda potenza di 3, moltiplicato 9 per 9. fà pure 81. ed ecco che la seconda potenza moltiplicata per la seconda potenza fà 81 come a quarta potenza, oppure la quarta potenza di 3.

Avendo assegnato al b il numero 4, e dovendo il detto b inalzarlo alla quarta potenza diremo 4 moltiplicato per 4. fà 16. seconda potenza di 4, e 16. moltiplicato per 4. fà 64. terza potenza di 4. dipoi 64. moltiplicato per 4 fa 256 quarta potenza di 4, o sia del b Dunque dicendo $a\ b^4 = a^2 b^2 \times a^2 b^2$ la somma di

$b\,a^4$

$a b^4$ significa 256. che moltiplicata per 81 fà la Somma di 20736. Così ancora 9^2 seconda potenza di a moltiplicato per 16 seconda potenza di b fà la Somma di 144, e di nuovo moltiplicato per a seconda potenza, ed anche b seconda potenza fa pure la Somma di 144. che moltiplicato 144. per 144. farà 20736. Dunque $a b^4 = a^2 b^2 x a^2 b^2$

Volendo moltiplicare le quantità complesse simili, moltiplico i termini per i termini, e riduco i prodotti. Avendo da moltiplicare $a + a$
per $b + b$

Scrivo $ab + ab$
$ab + ab$

ed ho per riduzzione $4 a b$

Ponghiamo che a fosse 3, e b fosse 5.

dunque $3 + 3$ 5. via 3 fà 15, e 5. via 3. fà 15.
$5 + 5$

e poi 5. via 3. fà 15., e 5. via 3. fà 15., ed ecco che moltiplicando le quattro figure scambievolmente fanno la Somma di quattro volte 15., che vale a dire 60 ch'è la Somma di $4 a b$.

Per moltiplicare le quantità che hanno Coefficienti, moltiplico i Coefficienti per i Coefficienti, e le quantità per le quantità, o sia le lettere, ed i Prodotti di quelli faccio servire per Coefficienti de' Prodotti di queste.

Per moltiplicare $2 a$
per $2 b$

io scrivo $4 a b$

E se

E se all' a assegnamo per esempio il 3, ed al b il 2. Dunque moltiplicando le lettere per le lettere, o sia a per b, o, vogliam dire, 2 per 3 fa 6; e moltiplicando i Coefficienti tra loro cioè 2 per 2 fà 4. Dunque 4 $a\,b$ significano quattro volte 6. ch' è la Somma di 24.

Essendo i Coefficienti espressioni di un certo numero di quantità simili, ma ridotte, il prodotto de' Coefficienti esprime il prodotto delle quantità. Al prodotto de' Coefficienti si unisce il prodotto di una lettera per una lettera, affine di determinare la Significazione del prodotto de' Coefficienti: così 3 a moltiplicati per 2 $b = a + a + a \times \overset{1}{b + b} = a\,b + a\,b + a\,b + a\,b + a\,b + a\,b = 6\,a\,b$. Già abbiamo riferito il 3 al a, ed il 2 al b dunque moltiplicando 3 a per 2 b i tre a esprimono tre volte il 3. cioè 9. i due b esprimono due volte il 2, che vuol dir 4. Dunque nove volte 4, o quattro volte 9 fanno 36. e dicendo uguale a tre volte a che vuol dire tre volte 3. cioè 9. che moltiplicato per due volte b cioè due volte 2 ch' è 4. dunque moltiplicato 9 per 4 fa 36. Dipoi si dice uguale a sei volte $a\,b$, che già abbiamo detto che ab forma 6, perchè $a = 3$, $b = 2$. Dunque due volte 3 fà 6, e sei volte ab è come dire sei volte 6 che fa 36.

Si tratterà dunque d' inalzare una quantità complessa ad una potenza determinata.

Per fare ciò, moltiplico la quantità per se stessa tante volte meno una, quanto l'Esponente

te della potenza contiene l' unità, e dispongo il prodotto, avendolo prima ridotto.

Per inalzare $a + b$ alla seconda potenza moltiplico una volta $a + b$ per $a + b$ cioè per a, indi per b, ed il prodotto ridotto, e disposto come $a^2 + 2ab + b^2$ è la seconda potenza: dunque se al a gli diamo 5 ed al b 7, diremo che a^2 cioè il quadrato di 5 ch'è 25, e b^2 ci'è il 7, il quale quadrato fà 49, e che $2ab$ significa 5 via 7 fà 35, due volte 35 fanno 70. Dunque 25 quadrato del a, 49 quadrato del b 70 moltiplicazione di $2ab$ fanno la Somma di 144, ed il numero 144 è il prodotto di $a + b$ inalzato alla seconda potenza.

Fa d' uopo inalzare $a + b$ alla terza potenza: moltiplico la seconda potenza $a^2 + 2ab + b^2$ per la prima $a + b$, e il prodotto $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, è la terza potenza.

Nello stesso modo si troveranno tutte le atre: quindi il quadrato d' un binomio $a + b$ contiene 1°. il quadrato a^2 del primo termine 2°. due volte il piano del primo per il secondo, o sia $2ab$ che è il doppio di a per b 3°. il quadrato di b^2 del secondo. Il Cubo di un binomio contiene 1°. il cubo di a^3 primo termine: 2°. tre prodotti $3a^2b$ del quadrato del primo termine a per il secondo b o sia il triplo del quadrato del primo per il secondo: 3°. tre prodotti di ab^2 del primo per il quadrato del secondo, ovvero il triplo del primo per il quadrato del secondo; 4° il cubo b^3 del secondo &c.

Quin-

Quindi in primo luogo la Tavola delle potenze di un binomio $a + b$, o vogliam dire

$a^1 + b^1$, prima potenza

$2^2 + 2ab + b^2$, ſeconda potenza

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ terza potenza

Già abbiamo ſpiegato il modo d' inalzare $a + b$ alla ſeconda potenza: reſta ora che ſpieghiamo il modo d' inalzare $a + b$ alla terza potenza. Dunque per alzare $a + b$ alla terza potenza, devo prendere a^2, o ſia il quadrato di 5 cioè 25, e farlo cubo, che ſi fà 25 moltiplicato per 5 prima potenza e radice, che fà la Somma di 125. dipoi ſi deve prendere tre quadrati di a che ſono tre volte 25, e fa 75 che moltiplicato per il ſecondo termine, cioè per b ch' è 7: dunque 75 moltiplicato per 7 fa 125. Dipoi ſi deve prendere il triplo del primo termine, che al noſtro eſempio il primo termine è a cioè 5, Dunque tre volte 5 fà 15, e ſi deve moltiplicare il quadrato del ſecondo termine ch' è b o ſia 7, ed il quadrato di 7. è 49. Dunque 49 ſi moltiplica per 15, e fà la Somma di 735. Appreſſo ſi deve prendere il quadrato del ſecondo termine ch' è b, o ſia 49, che multiplicato per 7. fà 343, cubo, e ſommati tutti inſieme, cioè

125	cubo di a
525	e ſono tre a^2 moltiplicati per b, o per
735	7, ch' e la Somma di 3 a, cioè di tre
343	5, che fa 15, e detto 49. ſi moltipli-
——	ca per 15,
1728	

ch'

ch'è il cubo di b, o sia 49 moltiplicato per 7 faranno la Somma di 1728, e questo è il valore di $a+b$ inalzato alla terza potenza.

Ciascheduna potenza, come si può vedere nella Tavola, comprende tanti termini più uno, quante volte l'Eponente della potenza contiene l'unità.

Ciascheduna potenza litterale di una quantità complessa, come per esempio $a^2 + 2ab + b^2$ seconda potenza di $a+b$ è una formola, ovvero una espressione generale, che rappresenta la maniera d'inalzare, alla stessa potenza ogni sorte di quantità dello stesso numero de' termini.

Si ha da inalzare 25 alla seconda potenza: sia $25 = a + b$ 1° io dico per seguire la formola $a^2 + 2ab + b^2$, il quadrato di a^2, o sia di 2 è 4, come 2, significa quì due diecine, ovvero 20. il quadrato 4 vale 400. scrivo dunque 4 supponendolo nell'ordine del Centinajo.

Poi dico il piano ab di $2 = 20$ per 5, è 100. dunque il doppio di questo piano ab è 200. scrivo 200 ponendo il 2 sotto il 4 che esprime delle centinaja. Indi dico il quadrato b^2, o sia di 5 è 25. scrivo 2 sotto il penultimo o nel luogo delle diecine, e 5 sotto l' ultimo o nel posto dell'unità. Finalmente sommo questi prodotti, ed ho il prodotto totale, o sia la seconda potenza di 25, ch'è 625. così $25 \times 25 = 625$

Ora veniamo a parlar più chiaro come s'inalzi il 25 alla seconda potenza. Sia $20 = a$, e $5 = b$.

$5 = b$, dunque il quadrato di 20 è 400, il quadrato di 5 è 25; il piano di $a\,b$, cioè di 20 x 5 forma 100. Dunque dicendo $2\,a\,b$ vuol dire moltiplicato due volte $a\,b$, e ſono 200, perchè $a = 20$ per $5 = b$ fà 100. preſo due volte fà 200.

che unite queſte Somme	400
fanno la Somma di 625,	200
e moltiplicato 25 per	25
ſeſteſſo dà la medeſima	——
Somma	625

Per lo ſteſſo principio ſi trova che ſe la quantità compleſſa ha più di due termini, la ſeconda potenza contiene 1°. il quadrato del primo termine più due volte il prodotto del primo termine per lo ſecondo, più il quadrato del ſecondo: due volte il prodotto della Somma de' due primi per lo terzo, più il quadrato del terzo. Dunque per ſpiegare più chiaramente volendo inalzare alla ſeconda potenza una quantità compleſſa, la quale abbia più di due termini, come ſarebbe $a + b + c$, e per eſempio al a gli ſi daſſe il valore di 3, al b di 4 al c di 5, ſi prende il quadrato del primo termine a, cioè 3 che fa 9. più due volte il prodotto del primo termine per lo ſecondo, o ſia due volte la moltiplicazione di a per b, vale a dire di 3 per 4 che fà 12 preſo due volte fà 24 più il quadrato del ſecondo termine, cioè di b, volendo dire di 4 ch'è 16, due volte il prodotto della Somma de' due primi per lo terzo: il prodotto della Somma di $a + b$, volendo di-

re di 3, e 4, che sommati fanno 7 per lo terzo, cioè a dire per *c*, o sia per 5, ch'è 7, e moltiplicato 7 per 5 fa 35, preso due volte fa 70, più il quadrato del terzo volendo dire di *c* ch'è 5, che per 5. fà 25, dal che ne risulta la Somma di 144.

Perchè 9 quadrato del primo termine: 24
24 prodotto del primo termine per il se-
16 condo due volte, 16 quadrato del
70 secondo termine: 70 due volte il
25 prodotto della Somma de' due primi
—— termini per il terzo: 25 quadra-
144 to del terzo termine, i quali tutti insieme fanno la Somma di 144. E quì abbiamo spiegato come s'inalzino tre quantità complesse alla seconda potenza.

Cerchiamo ora il cubo di un trinomio litterale $a+b+c$. Io trovo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3a^2c+3bc^2+c^3$ Ora $3a^2c+6abc+3b^2c$ è il prodotto del triplo del quadrato delle due prime radici $a+b$ per la terza c: poichè questo quadrato è $a^2+2ab+b^2$, ed il triplo, o sia $3a^2+6ab+3b^2 \times c = 3a^2c+6abc+3b^2c$ Dall'altra parte $3ac^2+3bc = 3a+3b \times c^2$, ovvero il triplo del prodotto della Somma delle due prime radici ab per il quadrato della terza c.

Da questo principio ne viene che se il polinomio, o la quantità complessa ha più di due termini, la terza potenza comprende 1°, il cubo del primo termine, o della prima radice, più

più tre prodotti del quadrato del primo termine per lo secondo più tre prodotti del primo termine per lo quadrato del secondo, più il cubo del secondo; tre prodotti del quadrato della Somma de' due primi termini. 3°. più tre prodotti della Somma de' due primi per lo quadrato del terzo: tre prodotti del quadrato della Somma de' tre primi termini per lo quarto, più tre prodotti della Somma de' tre primi termini per lo quarto &c.

Ora per maggior chiarezza spieghiamo come s' inalzi un trinomio litterale alla terza potenza. Ponghiamo, come già abbiamo detto, che *a* sia uguale *a* 3, *b* uguale *a* 4, *c* 5 uguale *a* 5. dunque dobbiamo trovare il cubo di *a*, o sia di 3, ch'è il 27 più $3a^2b$, che vuol dire tre volte 9 fà 27 per *b*, volendo dire moltiplicato 27 per 4, che fa 108, $+3ab^2$, vuol dire 3 *a*, tre volte 3 fa 9, il b^2 quadrato, o vogliam dire, 4^2 quadrato fa 16, che vuol dire 16 quadrato di *b* moltiplicato per 9 fa 144 $+b^3$, o sia il cubo di 4 cioè 64, $+3a^2c$, e questo vuol dire tre volte il quadrato di *a*, o sia tre volte il quadrato di 3, vale a dire tre volte 9, che fa 27 moltiplicato per *c*, o sia per 5, che fa la Somma di 135, $+6abc$, vuol dire *a* moltiplicato, per *b*, ed *a*, e *b* moltiplicati per *c*, o sia 3, 4, 5, che tre via 4 fa 12, e 5 via 12 fa 60, e $6abc$, vuol dire sei volte 60 fà 360 $+3b^2c$, vuol dire tre quadrati di 4, cioè tre volte 16, che fa 48 moltiplicato per *c*, o sia per 5 fa 240,

 +3,

$+ 3$, ac^2 vuol dire tre volte a o sia tre volte 3 che fa 9 moltiplicato per c^2 seconda potenza, o sia per lo quadrato di 5, cioè per 25, che fa 225 $+ 3bc^2$, che vuol dire 3 b tre volte 4 fa 12, c^2, o sia il quadrato di 5, che fa 25, e si moltiplica 25 per 12, e fa 300, $+ b^3$, o sia il cubo di 5, cioè 5 via 5 fa 25, e 5 via 25 fa 125, come qui si vede, quali Somme tutte unite fanno 1728. E detta Somma esprime $a + b + c$ trinomio litterale inalzato alla terza potenza.

125
27
108
144
64
135
360
240
225
300
125
———
1728

PROBLEMA IV.

Divisione delle quantità Algebriche.

ABbiamo abbastanza parlato della moltiplicazione: ora passiamo alla divisione. Dunque 3 moltiplicato per 4 fa 12: 12 diviso per 4 ci presenta nuovamente il 3. quindi come 3 moltiplicato per 4 uguaglia 12; così 12 diviso per 4 uguaglia 3. Dividete 12 per 4, o ri-

o riducete 12 in parti uguali, ognuna delle quali contenga quattro unità, il quoziente è 3, che uguaglia 12 diviso per 4. imperocchè tre parti di quattro unità per ciascheduna vagliono 12.

Una linea sotto il dividendo e sopra il divisore così $\frac{12}{4} = 3$, e questa è l' espressione della divisione, o la divisione istessa può esser presa per il quoziente. La divisione Algebrica non essendo altro, che una divisione numerica indicata sarà quella nella stessa maniera di questa. $\frac{a}{b}$ esprime la divisione di a per b.

Il carattere del quoziente è di esprimere quante volte il divisore è contenuto nel dividendo. La divisione è esatta in se medesima, ovvero senza residuo, come il dividendo diviso per il moltiplicatore uguaglia il quoziente. $3 \times 4 = 12$, $\frac{12}{4} = 3$. In una parola la divisione è l' antipoda, per così dire, della moltiplicazione. Dunque se $\frac{a}{b} = c$, $b c = a$: se il quoziente moltiplicato per il divisore uguaglia il dividendo, allora la divisione è giusta: per esempio a fosse il valore di 12, b di 4, e c di

B 3 3 dun-



3 dunque a, o ſia 12 diviſo per b, o ſia per 4 uguale $a\ c$, o ſia a 3 perchè 12 diviſo per 4, il quoziente è 3, o vogliamo dire che il 12 contiene tre volte il 4. Che ſia vero che $b\,c$ è $= a$ ora lo dimoſtreremo. Siccome il b o ſia il 4, ed il c, o ſia il 3 moltiplicati trà loro, cioè 3 via 4 fa 12, ecco che $b\,c = a$, cioè 3 moltiplicato per $4 = 12$.

I ſegni ſimili fanno $+$, i diverſi fanno $-$.

Eſempio $\dfrac{a\,b\,c}{a\,b\,d}$ quoziente $= \dfrac{c}{d}$. Le lettere ſimili ſi levano, quando queſte non hanno Eſponente.

Ponghiamo che il valore di a foſſe 2, di b foſſe 3, di c 4, di d 5. Dunque $\dfrac{2\,3\,4}{2\,3\,5}$ vale a dire due volte 3 fa 6, ſei volte 4 fà 24: dipoi due volte 3 fa 6, e cinque volte 6 fà 30. Dunque $\dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5}$, o ſia $\dfrac{c}{d}$ Imperocche cinque volte 6 fa 30, ed il 24 contiene il 6 quattro volte. Dunque 24 contiene quattro quinte parti del 30, o ſia quattro 6.

Fa d' uopo trovare il quoziente di $\dfrac{4\,a\,b}{2\,a}$ I Coefficienti ſe ſono uguali, ſi levano; ſe poi nò ſi ſoſtraggono. Dunque da 4 Coefficiente ſi ſottrae il 2 pure Coefficiente

4 $a\,b$

$$\frac{4ab}{2a} = 2b : \text{così } 2b \times 2a = 4ab.$$

Se a fosse uguale à 2, b uguale à 3, due volte 3 fa 6, e sei volte 4 fà 24. Dunque $2b$, o sia due volte 3 fa 6, e due volte a, o sia due volte 2 fa 4, e sei volte 4 fa 24. Dunque il quoziente $2b$, o sia due 3, cioè 6. moltiplicato per lo divisore $2a$, o sia due 2, o vogliam dire 4, fà 24, ch' è il dividendo, ed allora la divisione è giusta.

Avvertasi che quando sì il dividendo, che il divisore sono preceduti dalli stessi segni, il Quoziente deve esser sempre preceduto dal Segno + più. Ed al contrario allorchè il dividendo, e il divisore sono preceduti da segni differenti, il loro quoziente dovrà essere preceduto dal Segno − meno.

Laonde, come già è stato dichiarato nella moltiplicazione, + più per + più dà + più; − meno per − meno dà + più; e + più per − meno, ovvero − meno per + più, dà − meno.

Per dividere una potenza incomplessa per una potenza della stessa quantità, dall' Esponente di quella levo l' Esponente di questa, e la differenza n' è il quoziente; imperocchè aggiungendo gli Esponenti della potenza della stessa grandezza si moltiplicano queste potenze: dunque si dividono le potenze levando gli Esponenti dagli Esponenti; poichè la divisione è il con-

contrario della moltiplicazione: quindi $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$ Dunque ponghiamo che a fosse uguale à 2; Per inalzare a, o sia 2 alla quarta potenza si fa 2 via 2 fà 4 seconda potenza; 2 via 4 fa 8 terza potenza, 2 via 8 fà 16 quarta potenza. Dunque diviso a^4, o sia $\frac{16}{a^2}$, o sia 4, il quoziente è 4.

Ma l'Espressione Algebrica esprime $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$: volendo dire che la quarta potenza divisa per la seconda potenza, il quoziente è uguale $a^{4-2} = a^2$ Imperocchè da a^4 levando 2 rimane a^2, o sia da quattro potenze levandone due, ne rimangono due.

Maniera di estrarre la Radice si Quadrata, che Cubica.

DUnque se si moltiplicano due quantità differenti o simili l'una per l'altra a per b, o b per b, queste quantità sono i lati, o le Radici del prodotto, ovvero della Potenza.

Radice di una potenza è una quantità più semplice, che moltiplicata un certo numero di volte per se stessa, dà una potenza proposta. Ogni radice trae il suo nome dalla Potenza, a cui viene riferita; Così la Radice del Quadrato, o sia della seconda potenza è Radice Quadra-

drata: indi ne viene la Radice Cuba, ovvero Cubica, o Terza: poi ne viene la Radice Quadrato — quadrata, o sia quarta &c. Dunque per dimostrare il modo più facile di trovare la Radice a qualunque grandezza sia di lettere, o di numeri sarà d' uopo tenere il metodo seguente.

Per trovare la Radice quadrata di qualsivoglia numero si farà in questo modo. Si prende la quarta parte di quel numero di cui si cerca la Radice Quadrata, e di quella quarta parte si prende la Radice Quadrata, e detta Radice Quadrata della quarta parte, duplicata, darà la Radice quadrata di tutta la Somma. E se ci sarà qualche avanzo, quell' avanzo si moltiplica per 4, e farà l' avanzo di tutto quel numero: come per esempio. Se si cerca la Radice Quadrata di 68 si divide 68 in quattro parti, il quoziente è 17. Si cerchi la Radice quadrata di 17, il detto 17 non l' ha; ma si prende quella del 16 ch' è il numero Quadrato più vicino al 17, come di già abbiamo detto che vi deve prendere la Radice più vicina del numero Quadrato prima del dato numero. Dunque il 4 è Radice Quadrata del 16, che detto 4 raddoppiato fà 8, e 8 è la Radice quadrata del 64. Dipoi il detto 17 supera il 16 di una unità, che moltiplicata detta unità per 4, farà il detto 4 unito al 64 il numero 68. Eccone un altro Esempio di 572. La quarta parte di questo num°. è 143., e la sua Radice quadrata è 11: e perchè 11 per 11 fa

fa 121; e detto 11: dupplicato fa 22 di Radice quadrata: e perchè da 121 a 143 ci corre 22: il quale quadruplicato forma 88. e siccome il detto 22 dupplicato entra nel 88: in tal caso al detto 22 si aggiunge una unità, e si fa 23. E detto 23 e la Radice quadrata di 572 che si cercava.

Per estrarre la Radice della seconda potenza, o sia del Quadrato, divido l'Esponente della Potenza per l'Esponente del Segno Radicale, ed il Quoziente sarà l'Espenente della Radice. Poi si prende la Radice di questo quoziente, e quella raddoppiata è la Radice totale della seconda potenza: come per esempio. Se volessimo trovare la Radice di a^2. Dunque, come di già abbiamo detto, che ogni Radice piglia il suo nome dalla potenza; La Radice di a^2 seconda potenza la chiamaremo V^2 Radice seconda, quale segno serve ancora per qualsivoglia altra Radice; e perciò chiamasi segno Radicale.

Si divide dunque l'Esponente della Radice per l'Esponente della Potenza, volendo dire 2 per 2, il quoziente è 1. Si prende la Radice di questa unità, o vogliamo dire, la quarta parte di 2 moltiplicato per 2, e detta Radice si raddoppia, ed il Quozieute è la Radice totale di a^2. Poniamo che a fosse 36, ed il 36 diviso in quattro parti il quoziente è 9: vediamo che la Radice di 9 è 3, e detto 3 raddoppiato fa 6. Dunque la radice di a^2, o sia di 36 è il 6.

Paſ-

Paſſiamo ora ad eſtrarre la Radice Cubica di un Binomio litterale. Queſto Cubo contiene 1°. il Cubo della prima Radice parziale 2°. il triplo della ſeconda quadrato della prima moltiplicato per lo Quadrato della ſeconda. 3°. il Cubo della ſeconda.

Ciò ſuppoſto 1°. prendo la Radice Cubica del primo termine, da cui levo il Cubo di queſta prima Radice. 2°. triplico il Quadrato della detta Radice, e queſto triplo è un diviſore. Divido dunque il ſecondo termine per queſto diviſore, ed ho la ſeconda Radice; ed avendo moltiplicato il diviſore per queſto quoziente, ſottraggo il prodotto dal dividendo. 3° moltiplico il triplo della prima Radice per lo Quadrato della ſeconda, e levo il prodotto del terzo termine. Finalmente formo il Cubo di queſta Radice dall'ultimo termine.

Sia il Cubo $a+b($

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$-a^3$$

$$0+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$-3a^2b$$

$$0+3ab^2+b$$
$$-3ab^2$$

$$0+b^3$$
$$-b^3$$

1°. Pren-

1°. Prendo la radice terza di a^3; divido l'Esponente, per 3. o prendo il terzo dell'Esponente, ed ho la Radice $a^1 = a$; Imperocchè $a \times a \times a = a^3$, che scrivo sotto il primo termine a^3 col segno di sottrazione, e dico $a^3 - a^3 = o$; resta dunque $o + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Triplico il quadrato a^2, ed ho per divisore $3a^2$ divido poi il secondo termine $3a^2b$ per $3a^2$ ed il quoziente a è la seconda Radice; Imperocchè moltiplicati $3a^2$ per b e tolto il prodotto $3a^2b$ da $3a^2b$, resta $o\ 3ab^2 + b\ 3$.

Triplico la prima Radice a, e quadro la seconda b, e motiplicando il triplo della prima per lo quadrato della seconda ho $3ab^2$, che levo da $3ab^2$, e resta $o + b^3$.

Per fine cubo b, ed il $b^3 - b^3 = o$. Così $a + b$ è la radice cubica totale, che cercavasi. Per assicurarsene si può formare il Cubo della radice totale $a + b$, e se indi ne risulta il Cubo totale, segno è che l'Operazione è giusta. Se nel quoziente vi fosse qualche Residuo e che formato il Cubo delle radici si trovasse nel prodotto il Cubo delle radici con questo Residuo, l'Operazione sarebbe esatta; ma la quantità proposta non sarebbe un giusto Cubo.

Coll' istesso metodo si avrà la radice Cubica di ogni Palinomio.

Spieghiamo ora la radice cubica con maggior chiarezza. Il cubo di 1 è 1: perchè 1 via 1. fa 1; o sia 1 moltiplicato per 1 fa 1.

Il cubo di 2 è 8: poichè $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Per

Per la stessa raggione il cubo di 3 è 27, di 4: 64:, di 5. 125, di 6. 216, di 7. 343, di 8. 512, di 9. 729.

Se si pongono i numeri semplici.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Questi saranno i cubi di quelli, e quelli in conseguenza i cubi di questi. 9 è il più alto de' numeri semplici, ha per cubo 729 numero di tre cifre; 10 è il più basso dei numeri composti: Ha per cubo 1000 num°. di quattro cifre.

Dunque per trovare la radice cubica ad una quantità di più di tre cifre si fa così. Si divide la detta somma in membri ciascheduno de' quali sia di tre cifre, eccettuato il primo membro, che talvolta può essere di una, o di due cifre, e quanti saranno i membri, altrettanti saranno i numeri della radice che cercasi. Dipoi si cercherà la radice cubica del primo membro dalla parte sinistra, quando sia il detto membro numero cubo: se nò si prende il cubo più vicino. Ponghiamo che si voglia trovare la radice cuba di 13824.

13, 824 (24
8 (
———
58

che diviso in due membri, sono 13, e 824: il cubo più vicino al 13 è 8, che lo pongo sotto il 13. La radice cuba di 8 è 2, quale 2 pongo verso la destra nel luogo del quoziente, e detto 8 si sottrae da 13: resta 5, che si pone sotto l'8. Dipoi

poi si cala la prima cifra dell'altro membro, che nel nostro Esempio è 8, e si pone accanto al 5, e dico 58.

Appresso il cubo 2; che lo quadro, e fò 4: triplico il detto 4, e fò 12. Divido il 58 per 12, ed ho per quoziente il 4, che unito al 2 prima cifra del quoziente, forma 24.

E detto 24 è la radice cuba di tutto il numero 13824.

E per vedere se l' Operazione è giusta formo prima il Quadrato del 24, e dipoi il cubo, come nell' Esempio si vede.

```
   24
   24
  ----
   96
  48
  ----
  576
   24
  ----
 2304
1152
 -----
13824
```

Se si vuol estrarre la radice quadrata da qualsivoglia numero non solo per la quarta parte; ma anco per la sua ottava parte, si farà in questo modo.

Sieno per esempio numeri di una gran quantità; allora se ne può prendere il quarto del quarto; e dupplicata la radice della ottava parte,

te, il resultato sarà la radice di tutta la somma, come nell' esempio si vede. 1024: quadrato di 32: Dipoi la quarta parte sarà 256:, e la quarta parte di 256: sarà 64: la di cui radice è 8:, quale 8: quadruplicato farà la somma di 32: radice del numero 1024:

Delle Proporzioni in generale.

RApporto, o raggione si chiama il modo di essere di una grandezza riguardo ad un altra della stessa specie, o sia di un numero riguardo ad un numero, o di una linea riguardo ad una linea &c.

Differenza è ciò che una quantità ha di troppo, o di troppo poco, per uguagliarne un altra.

Ragione Aritmetica è la differenza di due quantità espresse in tal maniera $3 - 1$, $a - b$.

Ragione Geometrica è la maniera di contenere, o di esser contenuto, come la metà, o il terzo &c. Tale è il rapporto di 4: a 2:, o di 2: a 4:, essendo considerato il 4: come il doppio di 2, ovvero 2: come la metà di 4, e queste ragioni s' esprimono in tal modo 4: 2 o $\frac{4}{2}$, $a\,b$ ovvero $\frac{a}{b}$, $\frac{4}{2} = 2$. Ma il quoziente 2: esprime la maniera con cui 4 contiene 2: Dunque la divisione indicata è un rapporto geometrico. Nella ragione Geometrica, o Aritmetica il primo termine, o il superiore si chiama

antecedente l' altro *Conseguente*. Se l' Antecedente ugualia il suo Conseguente, come $\frac{4}{2+2}$, questa è ragione di uguaglianza; altrimenti si chiama Raggione d' inuguaglianza, come $\frac{3}{4}$, che vol dire tre quarte, o sia delle quattro parti tre.

L' Antecedente che contiene il suo Conseguente molte volte esattamente, o senza residuo si chiama *moltiplice*. *Sommoltiplice*, se egli è più volte contenuto, doppio, triplo &c. suddoppio, suttriplo &c. per esempio il 10 si dice doppio di 5, ed il 5 suddoppio del 10; il 16 si dice doppio del 8, e l' 8 suddoppio del 16 &c. così il 18 si dice triplo del 6, ed il 6 suttriplo del 18, ed il 24 si dice triplo del 8, e l' 8 suttriplo del 24, e così degli altri.

La quantità che presa un certo numero di volte è uguale ad un altra viene chiamata parte aliquota. Le aliquote ineguali, ma contenute ugualmente ne' loro tutti sono aliquote simili. Se qualche aliquota non misura giustamente due grandezze, elleno sono incommensurabili: come per esempio il 2 è parte aliquota dell' 8 perchè misura 8 ugualmente senz' avanzo. Le aliquote ineguali che sono contenute ugualmente ne' loro Tutti, sarebbe come il 3 al 9, ed il 5 al 15. La ragione di una antece-

cedente doppio come $\frac{6}{3} = 2$ perchè il 6 contiene il 3 due volte. Dunque il 6 è doppio di 3, ed il 6 si chiama antecedente, ed il 3 conseguente, ed il 2 Esponente, perchè il 2 espone che il 6 contiene due volte il 3.

La Ragione di un antecedente suddoppio, come il 3 al 6, o sia $\frac{3}{6}$, che espone essere il 3 suddoppio del 6.

Se due antecedenti contengono nella stessa maniera il lor conseguente, le ragioni sono uguali. Così $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ perchè tanto l' 8 contiene due volte il 4, quanto il 6 contiene due volte il 3. Se a contiene b come c contiene d: dunque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ovvero $a\,b = c\,d$.

La Ragione de' Tutti, e la ragione delle parti simili, cioè delle metà, de' terzi &c. sono uguali: imperocchè come il tutto contiene il Tutto, così la metà contiene la metà, ed il terzo il terzo &c. $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$ volendo dire, che il 18 diviso in tre parti, il 12 ne contiene due parti, o vogliamo dire due terze parti: così il 9 al 6; perchè il 9 diviso in tre par-

 ti,

ti, il 6 ne contiene due terze parti.

Ma la Ragione è maggiore se l'antecedente essendo lo stesso, il conseguente è minore, o se l'antecedente è maggiore, essendo il conseguente lo stesso, come $\frac{8}{2} > \frac{6}{2}$ 8 contiene più volte il 2 di quello che lo contiene il 6. così $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b}$.

La Ragione è minore se l'Antecedente essendo lo stesso, il Conseguente è maggiore $\frac{16}{8} < \frac{16}{4}$ 16 contiene minori volte l'8 di quello che 16 contenga 4 così $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{b}$ perche $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a}{b}$ con il Segno $<$ vuol dire che $\frac{a}{b}$ è minore di $\frac{a}{b+c}$. Se un numero, o una lettera esprime una ragione, questo è l'Esponente, come $\frac{8}{4} = 2$. L'Esponente di $\frac{8}{4}$, o della ragione doppia di 8 a 4 è 2 perchè 8 è doppio di 4: dunque 8 si dice aver raggione doppia al 4.

Si chiamano anche Esponenti di una ragione i due minori termini, che hanno la stessa ragione

ne che i due altri: quindi $2:1 = \frac{1}{2}$ sono essi Esponenti di 8 *a* 4 perche 4 è una metà di 8.

Gli Esponenti uguali sono esponenti di ragioni uguali; poichè espongono, o esprimono cose uguali. Dunque se x è esponente di $a\ b$, ovvero $\frac{a}{b}$, e z è esponente di $c.d$; essi sono uguali. $a.b = c.d$, ovvero $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Volendo significare per esempio a fosse uguale a 12, b uguale a 3, c uguale a 20, e d uguale a 5: dunque $\frac{a}{b} = x$, o sia $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{c}{d} = z$, o sia $\frac{20}{5} = 4$.

Le Ragioni uguali hanno gli Esponenti uguali poichè sono espressioni di cose uguali: dunque se $a.\ b = c.\ d$ o sia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e che x e z sieno i loro Esponenti, $x = z$.

Finalmente alcune Proposizioni svilupperanno ancora certe verità necessarie per l' intelligenza delle cose che ci rimangono a dire.

Proposizione I.

Due Raggioni uguali ad una terza sono uguali trà di loro.

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ dico $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

In questa Ipotesi $\frac{a}{b}$, ed $\frac{e}{f}$ hanno lo stesso Esponente, o l' Esponente di $\frac{c}{d}$. Dunque $\frac{a}{b} = \frac{c}{f}$

Volendo dire che se *a* fosse 16, *b* fosse 4, *c* fosse 20, *d* fosse 5, *e* fosse 36, *f* fosse 9 sarebbe: $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{20}{5} = 4$, $\frac{36}{9} = 4$, ed avendo gli Esponenti uguali ci si dimostra avere queste tre quantità ragioni uguali. Indi ne viene che queste tre quantità hanno ugualmente la ragione quadruplicata, perche il 16 contiene quattro volte il 4, il 20 contiene quattro volte il 5, ed il 36 quattro volte il 9: e perciò si dice 16 quadruplo del 4, il 20 quadruplo del 5, il 36 quadruplo del 9.

Pro-

Proposizione II.

Se si divide il maggior termine di una ragione per lo minore, si può mettere il prodotto del Quoziente, o dell' Esponente per termine minore in luogo del maggiore.

Se $\frac{a}{b} = c$ dico che si può porre bc in vece di a, $bc = a$ perche il prodotto del divisore per lo quoziente è uguale al dividendo. Volendo significare che se a fosse 12, e b fosse 3. dunque l' Esponente sarebbe $4 : \frac{12}{3} = 4$: e dicendo che si può porre bc invece di a volendo dire che 3: via 4 fa 12, ed ecco da b, formato a, o sia da 3 4 formato 12. E chiaramente si vede che il prodotto del divisore è uguale al dividendo.

Ed eccoci giunti alle proporzioni: imperocche ora si spiega cosa sia Proporzione.

La Proporzione è l' uguaglianza de' Rapporti, o delle ragioni. Laonde Proporzione Aritmetica sarà uguaglianza di differenza come $\frac{1}{3} = \frac{5}{7}$, ovvero $1.3 :: 5.7 = a.b : c.d$

Volendo dire che la differenza che passa tra 1,

e 3, è il 2., e tra 3, e 5 ancora ci passa 2. tra 5 e 7 parimenti ci passa 2.

Proporzione Geometrica è ugualità di ragioni, o di Rapporti geometrici come $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, ovvero 2. 4 :: 3. 6.

Volendo significare che per essere i quattro termini esatti nella Proporzione geometrica, si deve osservare che tanto i termini medj, quanto gli Estremi formino un' istesso numero, come in questo Esempio si vede, che due volte 6 fa 12, e quattro volte 3 fa 12 2. e 6. sono i termini estremi, e 4, e 3 sono i medj.

La Proporzione si chiama diretta quando i termini sono disposti in tal maniera, che il primo sia al secondo come il terzo al quarto, come 1. 3 : 5. 7. = *a. b* :: *c. d.* ovvero 2. 4 : 3. 6. = *a. b* :: *c. d.* volendo dire che in questi 1. 3 : 5. 7. tanto dal 1. al 3. ci è la differenza di 2., quanto ancora dal 5. al 7. E questo è il Rapporto alla Proporzione Aritmetica. Riguardo poi i quattro termini di proporzione Geometrica, cioè 2. 4 : 3. 6. siccome il 2. è metà di 4. così il 3 è metà di 6. Dunque tanto nell' una che nell' altra, com' è il primo termine al secondo, così il terzo al quarto.

Indiretta, o inversa quando i termini sono disposti, ed ordinati in maniera che il primo sia al secondo, come il quarto al terzo: come 1. 3 :: 2. 5 = *a b* :: *d. c*, ovvero 2. 4 :: 6. 3. = *a. b* :: *d. c.* Quando l' istesso termine è confe-

ſeguente del primo rapporto, ed è anteceden te del ſecondo, come 1. 3. 5. = *a b. c* = *a. b.* : : *b. c*, ovvero 2. 4. 8. = 2. 4 : : 4. 8. = *a b c* = *a. b* : : *b. c.* dove ſi dice che il primo ſia al ſecondo, come il quarto al terzo. E ciò vuol dire che nella Ragione Aritmetica in queſto Eſempio 1. 3 : : 7. 5. dal 1. al 3. la differvnza è 2. dal 5. quarto termine al 7. terzo termine anche ci corre 2. Dunque come il primo termine al è ſecondo, così il quarto al terzo.

In Ragione Geometrica inverſa nel noſtro Eſempio 2. 4 : : 6. 3. dicendo come è il primo al ſecondo, così è il quarto al terzo: perche il primo cioè il 2. è la metà di 4: ſecondo, così il 3. quarto è la metà di 6. terzo: il 2 è ſuddoplo del 4., ed il 3. è ſuddoplo del 6. Per meglio ſpiegarmi: dove ſi dice quando lo ſteſſo termine è conſeguente del primo rapporto, e antecedente del ſecondo vuol dire come nel noſtro Eſempio 1. 3 : : 3. 5. il 3. è conſeguente del primo rapporto, cioè del 1. e antecedente del quaato cioè del 5. in Raggione Aritmetica. In Ragione Geometrica poi nel no4ro Eſempio 2. 4. 8. il 4. è conſeguente del 2. ed è antecedente del 8. come 2. 4 : : 4. 8.

I termini della Proporzione ſi chiamano proporzionali nella Diretta. I due del mezzo diconſi Medj; i due altri cioè il primo, ed il quarto diconſi Eſtremi. Stabiliti queſti Principj la Proporzione, e Progreſſione Aritmetica vengono

gono naturalmente a presentarcisi per essere da Noi sviluppate.

Delle Proporzioni, e Progressioni Aritmetiche.

PROPOSIZIONE I.

Nella Proporzione Aritmetica l'Antecedente più, o meno la differenza è uguale al Conseguente.

IMperocchè la differenza è ciò che l' Antecedente ha di meno, o di più del suo Conseguente.

Sia la differenza 2 nella proporzione ascendente, 1. 3. 5. $1+2=3$, e $3+2=5$. Nella discendente 5. 3. 1. $5-3=2$, e $3-2=1$. Quindi ne viene che l' Antecedente si può mettere più o meno la differenza.

PROPOSIZIONE II.

Nella Proporzione Aritmetica la Somma degl' Estremi è uguale a quella de' Medj.

SE $a.b::c.d$ dico che $a+d=b+c$. Sia la differenza $=x$ volendo dire se a fosse 2, b fosse 4, c 6, e d 8 sarebbe 2. 4 :: 6. 8. dico che 2 e 8 estremi fanno 10, e 4, e 6. medj fanno parimente 10; Sia la differenza qualunque sempre però uguale, come vedesi

nel

nel nostro Esempio, dove la diferanza è 2.

PROBLEMA I.

Conosciuti i primi termini di una Proporzione Aritmetica trovare il quarto.

DAlla Somma de' Medj levo il primo termine, il residuo è il quarto: poichè la Somma de' Medj, come abbiamo di sopra spiegato, è uguale a quella degli Estremi. Sieno dati i termini 8. 11. 7. dico $11. + 7 = 18$, $18 - 8 = 10$: dunque 8; 11 : : 7. 10. sono in $a. b : : c. z.$ Io conosco precisamente $a\, b\, c$ dico $b + c = a + z$ dunque $b + c - a = z$ volendo dire $11 + 7 = 8 + 10$. Dunque tanto i Medj 11. 7. formano 18, quanto $8 + 10$ estremi formano anche 18 come $b + c - a = z$ vuol dire che $11 + 7 - 8 = 10$ perchè 11 e 7 fanno 18, meno 8 rimane 10, e così si fa noto z, o sia il quarto termine.

PROBLEMA II.

Trovare un medio proporzionale Aritmetico tra due termini noti.

PRendo la metà della Somma degli Estremi, e questa metà è il medio: poichè essendo raddoppiata, vale la Somma degli Estremi. Se $a + c = b + b \div a. b. c.$ Sieno gli Estremi 3 . . . 7. dico $3 + 7 = 10$: ma la metà

tà di 10. è 5: dunque 5 è il medio proporzionale, ovvero $\div 3.\ 5.\ 7.$

Veniamo ora alla Progressione Aritmetica. Questa altro non è chè la proporzione continua come $\div 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.$ &c. $= \div a, b, c, d, e$ &c. in cui la differenza è sempre la stessa. La Progressione Aritmetica ascendente può cominciare dal zero, come $o\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.$ &c. imperocchè la differenza di o a 1. di 1. a 2. &c. è la stessa $o + 1 = 1,\ 1. + 1 = 2$ &c. La grandezza può stendersi in tal maniera all' Infinito.

La Discendente può scendere fino al zero. I termini però positivi come $4.\ 3.\ 2.\ 1.\ o$; non così i termini negativi; Imperocchè non vi sono termini positivi sotto il zero, e che ciò sia vero $o - 1.$ non uguaglia alcun termine positivo: ma essa discende sotto del o in termini negativi all' infinito, poichè $o - 1 = 1,\ - 1 = - 2,\ - 1 = - 3$ &c. $3 - 2 = 1,\ 1 - 2 = - 1,\ - 1 - 2 = - 3$ &c.

Se abbisognasse di continuare una progressione Aritmetica, di cui si avesse il primo termine, e la diferenza, si aggiunge al primo termine la diferenza, o levandola, ovvero il secondo aggiungendo al secondo la differenza, o togliendola si avrà il terzo, e così successivamente; come per esempio 1, e 4 fa 5. 5, e 4. fa 9, 9 e 4 fa 13, e questa chiamasi Progressione Ascendente: dipoi la Progressione dicendente sarebbe 13 — 4 resta 9, — 4 rimane 5, 5 — 4 rimane 1. inoltre se nella Progressione Aritmetica si sommano anche i due ter-

termini

mini distinti dagli Estremi, fanno la Somma de' Medj, e degli Estremi, come per esempio 1, 4, 9, 13, 17, 21 se si sommano 1, e 21. Estremi fanno la Somma di 22. dipoi 4 e 17 fanno anche 22, e 9 e 13 Medj fanno anche 22. Se poi i termini fossero dispari, allora il medio sarà raddoppiato uguale agli Estremi, come per esempio 1, 4, 7, 10, 13 dunque 1, e 13 fa 14, 4 e 10 fa 14 e il medio cioè 7 raddoppiato fa anche 14.

Si deve ancora osservare che in una Progressione, il di cui numero de' termini è paro, il prodotto della Somma degl' Estremi per la metà del numero de' Termini vale la Somma de' Termini come nell' Esempio si vede 1, 3, 5, 7, 9, 11 la Somma degl' Estremi è 1, e 11, che fa 12, i termini sono sei, la metà è 3 che moltiplicato 12 per 3 fa 36, e la Somma di tutt' i detti termini fa ancora 36.

Se si desidera piantare degl' Alberi, o de Fiori in modo che ve ne sieno 3 nella prima fila, cinque nella seconda, e così successivamente, quanti ne bisogneranno per sei fila? questo è lo stesso che cercare la Somma di una Progressione di cui il primo termine è 3, il numero de' termini è 6, la differenza 2: moltiplico 2 ch' è la differenza per 5. numero de' termini che precedono l' ultimo 6, ed aggiungendo il prodotto 10 al primo termine 3, ho 13. valore del sesto termine, che unito al 3 valore del primo mi da 16 per Somma degl' Estremi: moltiplico questa Somma 16 per 3

metà

metà del numero de' termini, ed ho 48 Somma de' termini della Progressione dunque mi faranno di bisogno 48 piante come nell' esempio si vede, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 5 secondo termine raddoppiato fa 10 con 3 primo termine fa 13. ultimo termine, o sia sesto termine che unito al 3 primo termine fa 16, e questa è la Somma degli Estremi, la quale moltiplicata per lo primo termine, cioè 16 per 3 fa 48, e tale è la Somma de' mentovati sei termini.

Se si vorrà parimente disporre de' soldati in battaglia si troverà per questa stessa maniera, quanti uomini facciano perciò di bisogno.

Delle Proporzioni Geometriche.

IN primo luogo i tutti sono come le loro parti simili, le metà, i terzi &c. Ora in due ragioni uguali gli antecedenti sono i tutti i conseguenti le parti simili, ovvero al contrario. Dunque gli Antecedenti sono come i Conseguenti: se $ab = cd$, $ac = bd$. Volendo dire per esempio $\frac{a\ b}{2\ 4} = \frac{c\ d}{3\ 6}$ perchè il 2 è metà di 4 come il 3 è metà di 6. Dipoi $\frac{a\ c}{2\ 3} = \frac{b\ d}{4\ 6}$ perchè diviso il 3 in tre parti il 2 ne contiene due parti, e così diviso il 6 in tre parti, il 4 ne contiene due parti, e tan-

to

to 2.4. = 3. 6. i Medj moltiplicati fra loro fanno .12, come due volte 6 estremi fanno pure 12.

PROPOSIZIONE I.

In una proporzione Geometrica il prodotto degli Estremi è uguale al prodotto de' Medj.

SE $a . b :: c . d$. dico che $a\,d = b\,c$. Sia $\frac{a}{b} = x$ dunque $\frac{c}{d} = x$ dunque $b\,x = a$, e $d\,x = c$

a se 12 6 :: 8 4 dico che 12 moltiplicato per 4, ambedue gl' Estremi fanno 48 : e così i Medj 6 moltiplicato per 8 forma pure 48 come gl' Estremi. Sia $\frac{12}{6} = 2$ dunque 2 moltiplicato per 6 uguale a 12, e sia $\frac{8}{4} = 2$ dunque due volte 4 uguale a 8. I quattro termini proporzionali 12, 6, 8, 4 fanno un quadrato; perchè 6 moltiplicato per 12 fa 72, e 72 moltiplicato per 8 fa 576, che moltiplicato per 4 fa 2304 numero Quadrato.

Nella Proporzione continua il Piano, o il prodotto degli Estremi è uguale al quadrato del Medio:

Dico che in $\div a . b . c$, $a\,c = b^2$

Nella Proporzione $a . b :: b . c . a\,c = b^2$

Ma $\div a . b . c = a . b :: b . c$. In conseguenza la radice quadrata del Prodotto degli Estremi

fa-

sarà il Medio. Sia parimente $\div\!\div$ 2.4.8. $2 \times 8 = 4 \times 4 = 16$. Se conoscendo tre termini. $a.\ b :: c.$ di bna proporzione, cioè un Estremo a; e i duè Medj $b :: c.$ si divide il prodotto $b :: c.$ de' Medj per l' Estremo. Conosciuto $a.$ si avrà nel quoziente il quarto termine $d.$, o sia il secondo estremo, Sia anche $2.\ 4 :: 3.6.$ dico che $4 \times 3 = 12$, e $\frac{12}{2}$ diviso per 2 ugua- a 6 quarto termine. Per la stessa Raggione il prodotto degli Estremi diviso per uno de' Medj darà l' altro Medio.

Il Prodotto de' Medj diviso per lo primo Estemo può essera il secondo estremo.

Dice che $a.\ b :: c. \frac{b.c}{a} = a.\ b :: c\,d.$ Perche $\frac{b.\ c.}{a} = d$ Volendo dire $\frac{4.\ 3.}{2}$ o sia $\frac{12}{2}$ 12 diviso per 2 uguale 6 secondo Estremo.

Così nella Proporzione continova $\div\!\div\ a.\ b.\ c.$ il quadrato del medio diviso per lo primo Estremo valerà il secondo Estremo vale a dire $\div\!\div\ a.\ b.\ c. = a.\ b. :: b.\ c.$ In conseguenza per trovare una terza proporzionale a due grandezze non si ha che dividere il quadrato $\frac{b^2}{a}$ per la prima a, il quoziente $\frac{b^2}{a}$ sarà la terza. Così

∺ 2. 4. il quadrato di 4 è 16, il quale diviso per 2 prima grandezza, il quoziente è 8 terzo termine. Dunque 2. 4. 8. sono i tre termini proporzionali.

Se quattro termini sono disposti proporzionalmente che più dia più, e meno dia meno; che il primo termine sia al secondo come il terzo al quarto: questa è Proporzione, o sia Regola del Tre diretta come per esempio 2. 4: : 3.6. ovvero 6. 3 : : 4. 2. Se 20 soldi producono un soldo, cento soldi produrranno cinque soldi. Quando meno dando più, più dà meno che il primo termine è al secondo come il quarto al terzo, o che il quarto minore del secondo a proporzione che il terzo è maggiore del primo, ovvero all' incontro, questa è Regola del Tre inversa 2. è a 4. in raggione inversa di 4. a 2. Se 2. uommini domandano 4. giorni per fare un lavoro, 4 uommini ne domanderanno 2.

Si riduce la regola inversa alla Diretta formando ciascheduna ragione di Grandezza della stessa specie: così in vece di dire se 2. uomini richiedono 4. giorni, quanti giorni chiederanno 4 uommini. Si dirà 4 uommini a 2 uommini : : 4. giorni $a.\ d.\ x = 2.$ giorni.

Osserviamo finalmente che se tra quattro termini il primo è al terzo come il quarto al secondo la proposizione è reciproca, e che se da cosa uguale si toglie cosa uguale, il rimanente sarà uguale.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

Se quattro quantità sono disposte di maniera che il prodotto degli Estremi sia uguale al prodotto de' Medj, elleno sono proporzionali

SIeno *a. b. c. d.* se $ad = bc$ dico $a\,b :: c.\,d.$ Per spiegare con più chiarezza se *a. b. c. d.* fosse 4. 8. 6. 3. se $ad = bc$, oppure $4.\,6. = 8.\,3.$ dico 8. 4 :: 6. 3. dunque la ragione che ha il 4 al 8 ha il 3. al 6. perchè 4 è metà di 8., e 3. e metà di 6. dico 4. 8 :: 3. 6. essere quantità proporzionali perche il prodotto degli Estremi, cioè 4 via 6 forma 24, ed il prodotto de' Medj 8 via 3 fa pure 24.

Suppongo $\frac{a}{b} = m$, e $\frac{c}{d} = n$ basta provare che $m = n$ dunque $\frac{8}{4} = 2$, e $\frac{6}{3} = 2$ perchè quattro 4 ottave sono uguali ad una metà, e tre seste sono anche uguali ad una metà cioè 2 dunque due è uguale due, o pure $\frac{8}{4}$ uguale a due così $\frac{6}{3}$ uguale due: dunque $bm = a$, $dn = c$ volendo dire che due volte 4 uguaglia 8, e due volte 3 uguaglia ancora 6. Dunque

que $bdm = ad$, e $bdn = bc$ volendo dire che 4, 3, 2 = 8 3 perchè 4 via 3 fa 12, e 2 via 12 fa 24. Così ancora 8 via 3 fa pure 24.

Qualunque mutazione si faccia nella posizione de' termini la proporzione sussiste; purchè li stessi termini sieno Medj, o Estremi.

Allora il prodotto degli Estremi, e de' Medj è lo stesso; dunque &c.

	Se $a.b :: c.d.$	Poichè $ad = bc$
In ragione inversa	$b.a :: d.c.$	
In ragione alterna	$a.c. :: b.d.$	
Aggiungendo, o componendo	$a + b.b. :: c + dd$	

Sia	2. 4 :: 3. 6.
In ragione inversa	4. 2 :: 6. 3.
In ragione alterna	2. 3 :: 4 6.
Aggiungendo, o componendo.	2 + 4. 4 :: 3. + 6. 6.
	6. 4 :: 9. 6.

Volendo dire 2 più 4 fa 6, e 3 più 6 fa 9 Dunque

. 6. 4 :: 9. 6.

Se si aggiungono a due termini di una ragione due grandezze proporzionali, la ragione sussiste come per esempio. Se fossero quattro termini proporzionali 4. 8 :: 6. 12. Se ad uno di questi termini aggiungeremo una quantità proporzionale, come sarebbe al 4 la metà di 8, o pure una quarta parte di 8, e così respettivamente al 6 la metà di 12, o veramente la quarta parte di 12 si farà 8. 8 :: 12. 12. o veramente 6. 8 :: 9. 12. Tanto la Somma de' loro Medj sarà uguale alla Somma de' loro E-

ſtremi. E che ſia così 8 via 12 fa 96. tanto i Medj, che gl' Eſtremi, e così ancora i Medj 8 via 9 fanno 72, e gl' Eſtremi 6. via 12 fanno pure 72.

Se ſi moltiplicano i termini di una Proporzione per quelli di un' altra il primo per lo primo, il ſecondo per lo ſecondo &c. i prodotti ſono proporzionali.

Se *a. b.* :: *c. d.*, ed *e. f* :: *g. h.* dico che *a e* :: *b. f. c. g* :: *d. h.* baſta provare che il prodotto degl' Eſtremi è uguale al prodotto de' Medj.

Volendo ſignificare che ſe foſſero i termini 1. 2 :: 5. 10., e gl' altri 2, 4. :: 3. 6. Dunque moltiplicando 2 per 1 fa 2 primo termine: dipoi il ſecondo per lo ſecondo, cioè 2 per 4 fa 8, e così il termine 5 per 3 fa 15, ed il quarto termine per lo quarto cioè 10 per 6 fa 60. Dunque abbiamo i quattro termini prodotti dalla moltiplicazione di una proporzione per l' altra proporzione, che ſono queſti 2. 8 :: 15. 60. E per pruova che ſia la Proporzione eſatta la Somma de' Medj fa 120, e quella degl' Eſtremi fa pure 120.

Se tre grandezze ſono in proporzione continova la prima è alla terza come il quadrato della prima al quadrato della ſeconda.

Se ∺ *a. b. c.* dico che *a. c.* :: a^2 b^2 baſta provare che $a^2 c = a b^2$,

Dunque ſignifica che *a. b. c.*, o ſia 2. 4. 8. volendo dire che il 2 è all' 8 come il quadrato della prima cioè 2 moltiplicato per 2 che fa

4 qua-

4 quadrato della prima al quadrato della seconda, cioè 4 moltiplicato per 4 che fa 16 quadrato della seconda. Bastando pruovare che. $2^2 : 8 = 2 : 4^2$ o sia quattro 8 uguale a due 16. 4. quadrato di *a*, e 16 quadrato di *b*.

Dunque 4 via 8 fa 32, e 2. via 16. fa 32.

Così si può moltiplicare, o dividere due termini *a b* all'infinito senza che i prodotti, o i quozienti mutino rapporto.

Delle Progressioni Geometriche.

TRatteremo ora di Progressioni, di successioni, o di serie Geometriche; cioè di Proporzioni Geometriche continue di più di tre termini come ∺ 1. 2. 4. 8. 16. &c. = ∺ *a. b. c. d. e.* &c. ovvero ∺ 16. 8. 4. 2. 1. = ∺ *e. d. c. b. a.* delle quali la prima è ascendente; la seconda discendente. Nelle dette due progressioni ogni termine ha la stessa ragione a quello che siegue, e basta volgerne una per cangiarla nell'altra.

Ogni termine delle Progressioni contiene, o è contenuto; poichè la ragione che lo compone è maniera di contenere, o di esser contenuto: come il 4 contiene il 2 due volte, ed il 2 due volte è contenuto nel 4. solo che il *o* non contiene, ne è contenuto: quindi se si vuole che una Progressione cominci, o finisca per *o*, si riguarda il *o* come per una grandezza infinitamente piccola, ma bensì come grandezza.

 Quin-

Quindi ne viene che le Potenze di una medesima grandezza formino una Progressione $\div\!\!\div\; b^1\; b^2\, b^3\, b^4\; b^5$ &c.

Imperocchè $\frac{b^5}{b^4} = b,\ \frac{b^4}{b^3} = b.$

Dunque vi regna la stessa ragione, perchè l'Esponente è sempre lo stesso, ed in conseguenza gl'Esponenti delle Potenze, che formano una Progressione Geometrica, fanno una Progressione Aritmetica $\div$ 1. 2. 3. 4. 5., volendo significare la Progressione continua delle potenze, la quale si fa come nel susseguente Esempio $\div\!\!\div\; 2^1\; 4^2\; 8^3\; 16^4\; 32^5$. Imperocchè se si divide la quinta potenza per la quarta, il quoziente è 2 prima potenza, o radice:

Così $\frac{32}{16} = 2,\ \frac{16}{8} = 2,\ \frac{8}{4} = 2,\ \frac{4}{2} = 2$

Questo vuol dire b^1, o sia 2, b^2, o sia 4, b^3, o sia 8, b^4 o sia 16, b^5 o sia 32. Sempre s'intende di poter dare alle lettere il valore di quel numero, che si vuole.

PROPOSIZIONE I.

Nella Progressione $\div\!\!\div$ a. b. c. d. e. il prodotto del termine che precede per l'Esponente è uguale al termine, che siegue.

L'Esponente esprime la maniera con cui il termine precedente è contenuto nel seguen-

guente : così il termine precedente è divisore ; ed il conseguente dividendo. Ora il prodotto del divisore per l'Esponente è uguale al dividendo. Se $\frac{b}{a} = x$ dunque $ax = b$

In questa proposizione si comprende che il prodotto del termine precedente per l'Esponente è uguale al termine che siegue : perchè ∺ sia 2, 4, 8, 16, 32, 2 è il termine precedente moltiplicato per 2 Esponente fa 4, e 4 è il termine che siegue; e così degli altri. Che poi il prodotto del divisore per l'Esponente sia uguale al dividendo, ora lo dimostreremo.

Se $\frac{4}{2} = 2$, o sia $\frac{b}{a} = x$ dunque $ax = b$, o sia $2, 2 = 4$.

PROPOSIZIONE II.

Il secondo termime è uguale al prodotto del primo per l'esponente, il terzo al prodotto del primo per lo quadrato dell'Esponente: il quarto al prodotto del primo per lo cubo &c.

SIA a il primo termine, x l'Esponente ; dunque $a \, x \, x$, o $a x^1 = b$, il secondo termine dunque è $a x x x$, o sia $a x^2 = c$, il terzo dunque $a x^2 x x$, ovvero $a x^3 = d$. è il quarto &c. Volendo dire che se fossero i ter-

mini 2. 4. 8. 16. dunque il 4 secondo termine è uguale al 2, cioè al primo per l'Esponente 2, che vuol dire 2 x 2= 4: il terzo al prodotto del primo per lo quadrato, perchè il quadrato del 2 è 4. Dunque 2, è il primo, che moltiplicato per 4 fa 8 terzo termine: il quarto al prodotto del cubo dell'Esponente, il quale è 8: perchè 2 via 2 fa 4, e 2 via 4 fa 8, e 8 per lo primo, cioè per 2 fa 16. L'ultimo termine è uguale al prodotto del primo per l'Esponente inalzato ad una potenza che ha per Esponente il numero stesso de' termini meno uno. Il prodotto del primo per l'Esponente è 4 prima potenza e radice. 2 via 4 fa 8 seconda potenza e 2 via 8 fa 16 terza potenza. I termini sono quattro; dunque il prodotto del primo per l'Esponente è inalzato ad una potenza che ha per Esponente il numero de' termini meno uno, cioè a dire il 4. è inalzato alla terza potenza: di più l'ultimo termine meno il primo è la Somma de' termini che precedono l'ultimo. E che ciò sia vero ∺ 2. 4. 8. 16. leviamo il primo termine, cioè il 2 da 16 resta 14. Dunque 14 è la Somma de' termini antecedenti all'ultimo perchè 2 e 4 fanno 6, e 8 fanno 14.

Delle Raggioni composte.

Ragione composta è una ragione che risulta da altre ragioni, le quali si chiamano ragioni componenti, e se la medesima è

com-

composta di due ragioni uguali, allora è ragione dupplicata, se di tre triplicata, se di quattro quadruplicata &c.

Finalmente l'Esponente di una ragione *n* è l'Espressione. Quindi può prendersi per la ragione stessa. Ciò supposto 1°. quando tre termini si sieguono in tal maniera che il primo sia minore del secondo, ed il secondo del terzo, il prodotto degli Esponenti della ragione del primo al secondo, o del secondo al terzo è l'Esponente della ragione del primo al terzo.

Siano i termini $a.\ b.\ c,\ \frac{b}{a} = m,\ \frac{c}{b} = n$ Dico che $\frac{c}{a} = mn$ volendo dire se i termini fossero 2. 4. 8, $\frac{4}{2} = 2,\ \frac{8}{4} = 2$ dico che $\frac{8}{2} = 2,\ 2$, o sia $= 4$. $am = b$ per conseguenza $amn = bn = c$, o sia $22 = 4$ per conseguenza $222 = 42 = 8$ Volendo dire 2 x 2 fa 4, e 4 x 2 fa 8 così due volte 4, o sia quattro volte 2 fa pure 8. Dunque $\frac{amn}{a} = \frac{c}{a}$ ma $\frac{amn}{a} = mn$ dunque $\frac{c}{a} = mn$. Dunque $\frac{222}{2} = \frac{8}{2}$ volendo dire che 2 x 2 fa 4, e 4 x 2 fa 8,

e $\frac{8}{2}$ fa 4. Ma $\frac{2\,2\,2}{2} = 2\,2$ dunque $\frac{8}{2} = 2\,2$

Volendo di nuovo dire che 2×2 fa 4, e 4×2 fa 8, e $\frac{8}{2} = 2\,2$, o sia $= 4$ dunque $\frac{8}{2} = 2\,2$

Quindi i tre termini *a b c*, o sia 2 4 8 la Ragione del primo al terzo sarà composta di quella del primo al secondo, e del secondo al terzo come $2 \times 2 = 4$ $2 \times 4 = 8$ la ragione del primo al quarto sarà composta di tre intermedj.

In una Progressione Geometrica continua ∺ *a b c d e*, o sia ∺ 2. 4. 8. 16. 32. in cui regna la medesima ragione, la ragione del primo termine al terzo sarà duplicata, cioè due volte 2 fa 4, e due volte 4 fa 8, ed 8 è il terzo termine: del primo al quarto triplicato, perche due volte 2 fa 4, due volte 4 fa 8, due volte 8 fa 16, e 16 è il quarto termine: del primo al quinto quadruplicato, poiche due volte 2 fa 4, due volte 4 fa 8, due volte 8 fa 16, due volte 16 fa 32 quinto termine.

Date due ragioni coi loro Esponenti la ragione del prodotto degli antecedenti, e del prodotto de' conseguenti è uguale al prodotto degli Esponenti. Sia $\frac{a}{b} = m$, e $\frac{c}{d} = n$ dico che

$\frac{a\,c}{b\,d} = m\,n$, o sia $\frac{4}{2} = 2$, e $\frac{6}{3} = 2$ dico

che

che quattro $\frac{4}{2}\frac{6}{3} = 2\ 2$ perchè 4 via 6 fa 24.

e 2 via 3 fa 6, $\frac{24}{6} = 2\ 2$, o sia 4 $a = b\ m$, $c = d\ n$ volendo dire $4 = 2\ 2$, o sia uguale a 4, $6 = 3\ 2$, o sia uguale a 6 perche come due volte 2 fa 4, così due volte 3 fa 6.

Dunque $a\,c = b\,d\,m\,n$, o sia $4\,6 = 2\,3\,2\,2$ Perchè 4 via 6 fa 24, e 2 via 3 fa 6, e 2 via 6 fa 12, e 2 via 12 fa pure 24.

Fa d' uopo trovare la ragione composta di molte ragioni date: moltiplico gli antecedenti, per gl' antecedenti, ed i conseguenti per i conseguenti, e la Ragione de' Prodotti è la ragione composta. Come per esempio 2 4 5 10 due volte 5 fa 10, e quattro volte 10 fa 40 sarà una ragione composta delle ragioni di 2 a 4, e di 5 a 10

I piani sono in ragione composta di quella delle loro radici.

Sieno le radici $a\,b\,c\,d$, o sia 2 4 3 6 i Piani $a\,c\,b\,d$, ed i piani $2\ 3 = 6$, e 6 è numero piano prodotto da 2 3: così anche $4\ 6 = 24$. ed il 24 è numero piano prodotto da 4 6. I quadrati $a^2\ b^2$ o sia $3^2\ 6^2$ sono in ragione dupplicata di quelle delle loro Radici, $a\,b = a\,b$ o sia $3\,6 = 3\,6$. La ragione di $a^2\ b^2$ o sia $3^2\ 6^2$ è composta di due ragioni uguali $a\ b :: a\ b$ o sia $3.6 :: 3.6$. Dunque ella è duppli-

plicata perchè $3 \times 3 = 9$ $6 \times 6 = 36$

I Solidi *a c e b d f*, o sia 2 4 6, 3 5 7 sono in raggione composta di quella delle loro Radici *a b c d e f*, o sia 2 3 4 5 6 7 *a c e* o sia 2 4 6 è il prodotto degli antecedenti *b d f* o sia 3 5 7 de' Conseguenti. Il prodotto di 2 4 6 è 48 numero solido prodotto da 2 via 4 fa 8, e 6 via 8 fa 48. Il prodotto di 3 5 7 è 105 numero solido prodotto da 3 via 5 che fa 15, e 7 via 15 che fa 105.

I cubi a^3 b^3 o sia 3^3 4^3 sono in ragione triplicata. Eglino sono in ragione composta di tre ragioni uguali *a b* = *a b* = *a b* o sia 3 moltiplicato per 3 che fa 9., 3 moltiplicato per 9. che fa 27, ed ancora 4 moltiplicato per 4 che fa 16., 4 moltiplicato per 16 che fa 64 ed il 27 è numero cubo di 3, e 64 è numero cubo di 4. Il 3. poi è radice cuba di 27, ed il 4 radice cuba di 64.

I Procotti di due termini corrispondenti di due Progressioni formano una Progressione ve: gr: ∺ *a b c d*, ∺ *e f g h* o sia ∺ 2 4 8 16. ∺ 3 6 12 24 ∺ *a e b f c g d h*, o sia 2 3 4 6 8 12 16 24 volendo dire che 2 moltiplicato per 3 fa 6, e 6 moltiplicato per 4 fa 24, e 8 per 12. fa 96, e 16 per 24 fa 384. Dunque da queste due Progressioni de' terminini corrispondenti ∺ 2 4 8 16, ∺ 3 6 12 24 si forma questa progressione ∺ 6 24 96 384.

Del-

Delle Frazzioni.

CHiamo io in primo luogo unità, ciò che si considera separato da ogni altra cosa. L'unità divisibile, ovvero che contiene delle parti è un intiero.

Frazione, come $\frac{2}{4} = \frac{a}{b}$ è una espressione formata di due quantità poste l'una sopra l'altra, delle quali quella di sotto chiamasi denominatore, perchè essa esprime le parti dell'unità, o sia dell'intiero; e quella di sopra si chiama numeratore, ed esprime un certo numero di queste parti, o di parti simili.

Così $\frac{1}{2}$ esprime una metà dell'intero $\frac{1}{3}$ una terza $\frac{1}{4}$ una quarta, $\frac{1}{5}$ una quinta &c.

Si riducono le Frazzioni all'istesso dominatore in questo modo. Si moltiplicano i numeratori per i denominatori delle altre frazzioni in questa guisa.

$$\text{Numeratori} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \quad \text{Denominatori}$$

Reduzzione

$$\frac{adf}{bdf}+\frac{cbf}{bdf}+\frac{ebd}{bdf}$$

O sia

$$\text{Numeratori } \frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{8} \text{ Denominatori}$$

Reduzzione

$$\frac{80}{120}+\frac{96}{120}+\frac{90}{120}$$

Sicchè si moltiplica il primo numeratore con il secondo denominatore, cioè 2 per 5 che fa 10, e detto 10 si moltiplica per lo denominatore seguente, cioè 8, e si fa 10 per 8 80.

Di poi si prende il secondo numeratore ch' è il 4, e si moltiplica per lo primo denominatore ch'è il 3, e si fa 3 per 4, 12. Si moltiplica il 12 per 8 terzo denominatore, lasciando sempre quel denominatore che sta sotto il numeratore di cui servesi. Dunque come abbiamo detto che 3 per 4 fa 12, e che poi 12 moltiplicato per 8 terzo denominatore fa 96.

Indi si prende il terzo numeratore ch' è il 6 lasciando, come di già abbiamo detto, il domina-

minatore sotto di lui. Dunque diremo 6 moltiplicato per lo primo denominatore cioè per 3 fa 18, e detto 18 si moltiplica per lo secondo denominatore, cioè per 5 che 18 per 5 fanno 90. Di poi si moltiplicano i denominatori fra di loro cioè 3 per 5 fa 15, e 8 per 15 fanno 120, ed ecco fatta la Reduzzione de' Rotti.

Sommare delle Frazzioni.

Per sommare le Frazzioni riduco i numeratori all'istesso denominatore. Sommo i numeratori, e detta somma la pongo sopra il denominatore commune.

Sia $\frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf}$

Somma $\frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$

O sia $\frac{80}{120} + \frac{96}{120} + \frac{90}{120}$

La somma de' numeratori fa $\frac{266}{120} = 2$, 120 è contenuto due volte in 266 coll'avanzo di $\frac{26}{120}$

Sot-

Sottrarre delle frazzioni.

SI riducono le Frazzioni alla medesima denominazione: indi levando il numeratore dal numeratore si pone la differenza sopra il denominatore commune. Per sottrarre $\frac{c}{d}$ da $\frac{a}{b}$

Le riduco, ed ho $\frac{bc \quad ad}{bd}$

Levo bc da ad, ed ho $\frac{ad - bc}{bd}$

O sia $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ si uniscono i numeratori con il denominatote a forma di Croce, cioè $\frac{25 \quad 43}{35}$ e sotto vi si pone il denominatore commune che qui è 35.

Dipoi 2 per 5 fa 10, e 3 per 4 fa 12: questa e la moltiplicazione de' numeratori. Ora moltiplichiamo i dominatori cioè 3 per 5 fa 15. Dunque. $\frac{10 \quad 12}{15}$

E dico $\frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}$

Così per levare $\frac{2}{3}$ da $\frac{3}{4}$

1°. li

1°. li riduco, ed ho $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12} = \frac{8.\ 9}{12}$

2° Sottraggo 8 da 9, ed ho $9 - 8$

3° Pongo $9 - 8$ sopra il denominatore 12, e trovo la differenza $\frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$

Moltiplicazione delle Frazzioni.

MOltiplico i numeratori l'uno per l' altro, e i denominatori del pari, ed il prodotto de' numeratori posto sopra l'altro dà una frazzione ch'è il prodotto totale; e che si riduce alla sua più semplice Espressione.

Volendo moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scrivo $\frac{a\ c}{b\ c}$ ch' è il prodotto.

O sia $\frac{8}{4}$ per $\frac{6}{3}$ scrivo $\frac{8\ 6}{4\ 3}$ moltiplico 8 per 6, ed ho 48 numeratore: dipoi 4 per 3 che fa 12., denominatore.

Dividere delle Frazzioni.

MOltiplico in primo luogo il numeratore del dividendo per lo denominatore dal divisore: indi il denominatore del dividendo per lo numeratore del divisore; ed il primo prodot-

dotto poſto ſopra al ſecondo da una frazzione, ch' è il quoziente che ſi riduce, ſe ſi può.

Dico che $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, ovvero $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\ d}{b\ c}$

Sia $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$ baſta provare che $\frac{a\ d}{b\ c} = \frac{m}{n}$ Volendo dire che ſe a foſſe 12, b foſſe 3, c foſſe 8, d foſſe 4 ſarebbe $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{8}{4} = 2$. Dunque $\frac{124}{38} = \frac{4}{2}$, o ſia 4 per 12 $= 48$, e 3 per 8 $= 24$, $= 2$.

Laonde quando il diviſore è minore del dividendo, la frazzione ch' è il quoziente, ſi trova maggiore dell' unità, avendo un numeratore più grande del denominatore. Dividete una metà per una quarta, il quoziente è $\frac{4}{2} = 2$. Dividete $\frac{1}{1}$ per $\frac{1}{1000000}$ il quoziente è $\frac{1000000}{1}$; quindi una grandezza diviſa per

zero

zero è uguale ad una grandezza infinitamente picciola, e diverià per così dire infinitamente grande: Poiche $\frac{1}{0} = \infty$. In conseguenza $\infty \times 0 = 1$. Ma dico bene che dopo avere scorso tante verità così evidentemente dimostrate non andiamo per ora a perderci nell' Infinito.

Per maggior chiarezza addurremo un altro Esempio.

Il partire, o sia dividere delle Frazzioni, come di già abbiamo dimostrato si fa invertendo le lettere nel divisore, e le medesime si uniscono come nella moltiplicazione. Dico che $\frac{a}{b}$ diviso per $\frac{c}{d}$ si fa $\frac{a}{b}\,\frac{d}{c}$

Sia $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$ basta pruovare che $\frac{a}{b}\,\frac{d}{c}$ $= \frac{m}{n}$

Sia $\frac{8}{2}$ per $\frac{6}{3}$ si fa $\frac{8}{2}\,\frac{3}{6}$ sia $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{6}{3} = 2$ bisogna pruovare che $\frac{8}{2}\,\frac{3}{6}$ sieno uguali à $\frac{4}{2}$ volendo dire che 8 moltiplicato per 3 fa 24, e

 per 2

2 per 6 fa 12. Dunque $\frac{24}{12} = 2$, e $\frac{4}{2} = 2$.

Dell' Equazioni.

Equazione in primo luogo è ſegno di uguaglianza tra due quantità di valore uguale: come $a + x = b - c$. Le due quantità ſono i Membri dell' Equazione. Volendo dire che ſe a foſſe 4, b foſſe 9, c 3, x ſarebbe 2: poichè a rappreſentando 4, e da b, o ſia, 9 levando c, o ſia, 3 rimane 6. Dunque a eſſendo 4 per uguagliarlo al 6 ci vuole 2. dunque x è 2, ed allora ſarà $4 + 2 = 9 - 3$, o ſia $a + x = b - c$, e l' Equazione ſuſſiſte.

Ora à coſe uguali aggiungendo coſe uguali, i tutti ſono uguali: ed al contrario da coſe uguali togliendo coſe uguali, i Reſidui ſono uguali.

Per eſempio ſe a 12 aggiungiamo 4, farà 16 numero uguale; da 12 leviamo 4, rimane 8 parimente numero uguale.

Se ſi moltiplicano due grandezze uguali, o che ſi dividono per una iſteſſa i prodotti, o i quozienti ſono uguali: ed in conſeguenza le radici uguali danno delle potenze uguali: come ſarebbe ſe ſi moltiplicaſſe 8 per 4, fa 32, e 8 4, e 32 ſono tutti numeri uguali, e ſe 32 ſi divide per 8, il quoziente è 4. come chiaramente ſi vede $\frac{32}{8} = 4$.

Se

Se poi 8 lo prenderemo per radice, e lo inalzeremo a qualche potenza, come sarebbe alla seconda potenza cioè 8 per 8 che fa 64, ed il 64 è numero uguale, e così di ogni altro numero uguale inalzato a qualsisia potenza.

Ed al contrario se si aggiunge ugualmente a due membri di una Equazione, o che si levi ugualmente, o che si moltiplichino i suddetti, o che si dividino per la stessa quantità l'Equazione sussiste.

Volendo dire che se i due membri per esempio fossero $4 + 8 = 15 - 3$, se al 4 si aggiunge 2 numero paro, ed anco al 8 si aggiunge 2, ed al 15 si aggiunge 4 si fa $6 + 10 = 19 - 3$ e l'Equazione sussiste. Perchè abbiamo aggiunto agli membri quantità uguali.

Così se da due membri leveremo quantità uguali, come sarebbe al 4 leviamo 2, ed anche leviamo 2 al 8, ed al 15 leviamo 4, resterà $2 + 6 = 11 - 3$, e l'Equazione sussiste.

Se poi si dividono gli stessi membri per la stessa quantità come sarebbe $4 + 8$ diviso 4 per 4 uguale 1, 8 per 8 uguale 1. Dunque $1 + 1 = 5 - 3$, e l'Equazione sussiste.

Laonde se un termine di un membro ha il segno meno $-$, e che si trasporti questo termine nell'altro membro mutando il segno, l'Equazione sussiste: Poichè ugualmente si aggiunge da una parte, e dall'altra. Se $a + x = b - c$, $a + c + x = b$. Volendo dire che se a fosse 4, b fosse 12, c fosse 3, x deve

 esser

esser 5: perchè $4 + x = 12 - 3$ volendo dire $= 9$. Dunque al 4 aggiungiamo x, o sia 5, farà 4 e 5, 9. Dunque x è 5, Se $4 + 5 = 12 - 3$, $4 + 3 + 5 = 12$.

Se un termine di un membro ha il segno più $+$, e che si trasporti questo termine nell'altro membro col segno $-$, l'Equazione sussiste: poichè si leva ugualmente da una parte, e dall'altra. Se $a + x = b$. $a = b - x$.

Volendo dire se $4 + 8 = 12$, $4 = 12 - 8$; imperocchè trasportando x col segno $-$ che non aveva; questo si leva da ambedue le parti.

Si possono rendere positivi tutt'i termini di una Equazione, traspondendo col segno $+$ quelli che hanno il segno $-$. $a - b + c - d = b^2 + c^2$ diverrà $a + c = b^2 + c^2 + b + d$.

Per esempio fosse $a - b + c - d = b^2$ c^2: posto che l'a fosse 13, b 2, c 3, d 1: sarebbe $13 - 2 + 3 - 1 = 2^2\ 3^2$. Dunque $13 - 2 + 3 - 1 = 4 + 9$: diverrà $13 + 3 = 4 + 9 + 2 + 1$.

Ove non vi sono più termini positivi si possono parimenti trasportare tutt'i termini di un membro nell'altro uguagliando a zero; cioè sottraendo un membro dall'altro, e ponendo zero solo da una parte, l'Equazione sussisterà: imperocchè se da una grandezza si leva una grandezza uguale, il residuo è uguale a zero. E se quando si leva una grandezza da un altra la differenza è zero, pur tuttavia vi rimane ugualità di grandezza. Chi dice $a + b = c + d$,

$+ d$, ovvero $a + b - c - d = o$ viene a dire l'istessa cosa.

Volendo dire che se a fosse 4, b fosse 8, c fosse 5, d fosse 7 si farebbe $4 + 8 = 5 + 7$, ovvero $4 + 8 - 5 - 7 = 0$.

Trasportando così i termini di un membro si disimpegna un altro termine, ed un termine che per la Trasposizione degli altri si accompagna, viene a trovarsi in uu sol membro, ed in questo modo la quantità è disimpegnata.

Se una quantità che prima era incognita si trova disimpegnata, e che si conoscono i termini dell' altro membro, ella cessa di essere incognita. Così l' Equazione conduce alla cognizione dell' incognita col disimpegnarla.

Le quantità note si esprimono colle prime lettere dell' Alfabeto: le incognite colle ultime z y x.

Le Grandezze che accompagnano l' incognita x ne sono aggiunte, o ne sono sottratte, o la moltiplicano, o la dividono, sono elleno aggiunte, ed allora l' incognita x resterà disimpegnata colla sottrazione, colla divisione, divise colla moltiplicazione.

PROBLEMA I.

Per disimpegnare un incognita colla Somma, colla Sottrazione, ovvero coll' una, e coll' altra.

LEvo le quantità che l'accompagnano in un membro ponendole nell'altro con de' Segni contrarj.

Così $x + a - b = c + d$, diviene $x = c + d - a + b$. Volendo dire x quantità incognita $+ 4 - 2 = 5 + 7$ diviene $x = 5 + 7 - 4 + 2$. Dunque x è 10. Poichè $x + 4 - 2 = 5 + 7$ Volendo dire $= 12$. Da 4 leviamo 2, rimane 2, che per andare a 12 ci vuole 10. Dunque $x = 10$ dicendo che diviene $x = 5 + 7 - 4 + 2$ si conferma che x è 10: perchè $5 + 7$ fa 12, $- 4$, rimane 8, $+ 2$ fà 10 dunque x è 10.

Osservazioni sopra l' Analisi.

IL Carattere dell' Analisi è di risolvere una grandezza, separarne le parti note dalle incognite, far servire la cognizione dell' una alla cognizione delle altre coll' artificio, e per così dire col giuoco delle Equazioni, nelle quali si paragonano le cose note all' incognite.

Se l'incognita che si cerca in una Equazione è lineare, o che non passi la prima potenza, questa Equazione è un Problema semplice, o sia del primo grado, come $x = a$, ovvero $x - a = o$,

come

come fosse $8 = 8$, ovvero $8 - 8 = 0$: E così di ogni altro numero che non passi la prima potenza.

Se l' incognita poi è inalzata alla seconda potenza l' Equazione, o la Questione è del secondo grado come $x^2 + a\,x = a\,b$, ovvero $x^2 + a\,x - a\,b = 0$.

Come per esempio a fosse 2, e b fosse 12 dunque $a\,x = a\,b$, $2\,x = 2\;12$, o sia $= 24$ dunque x è 4, perche il 4 quadrato fa 16, $a\,x$ o sia 24, e due volte 4 fà 8, che aggiunto al 16 fa 24. Dunque $4^2 + 24 = 2\;12$, o sia $16 + 8 = 24$: e così $x^2 + a\,x - a\,b = 0$ sarebbe $16 + 8 - 24 = 0$

Secondo che l' incognita x è inalzata nel primo termine dell' Equazione; tale parimenti è l' Equazione, se questa fosse x^1, x^2, x^3 &c. significando l' Equazione del primo, del secondo, del terzo grado &c.

Per formare l' Equazioni proprie, e risolvere una questione l' Analisi segna le quantità note, e le incognite colle lettere a loro convenevoli.

Essa esamina i Rapporti di queste grandezze, e questi rapporti noti danno l' Equazione. Fa d' uopo trovare due grandezze incognite, delle quali si conosca la Somma, e la Differenza.

L' Analisi dice: sia la Somma nota $= a$, la differenza $= b$, la più grande, e la prima incognita $= x$, la seconda incognita $= y$. Conoscendo il Rapporto della Somma ad a, e quello della differenza b, l' Analisi dice la Somma

ma $= a$ è $x + y$ dunque $x + y = a$, e questa è la prima Equazione. La differenza $= b$, è $x - y$ dunque $x - y = b$, e questa è la seconda Equazione. Ecco tante Equazioni, quante sono le incognite.

Ciò supposto sia il Problema generale risolvere le questioni del primo grado.

1°. Stabilisco le grandezze note, e le incognite.

2°. Formo tante Equazioni, s'è possibile, quante sono le incognite; imperocchè paragonando ciascuna incognita, con qualche grandezza nota, si scuopre la lor differenza; e ciò che fa d'uopo aggiungere, e levare per renderle uguali.

3°. Disimpegno alcune incognite per avere il loro valore.

4°. Disimpegnata ciascheduna incognita sostituisco il suo valore nelle altre Equazioni, ove ella si trova, per avere una Equazione totale, la quale non abbia che una incognita.

Finalmente disimpegno questa incognita, ed ho l'Equazione semplice, che decide la questione.

Questione.

Se si divide 100 in due quantità, delle quali la Differenza sia 40 quali saranno queste due quantità.

PER trovarle, prima stabilisco le due quantità note, e le due incognite dicendo:

Sia

Sia $100 = a$
$40 = b$

La più grande, e
la prima incognita $= x$
la seconda incognita $= y$

1°. Facendo tante Equazioni quante sono le incognite, dico per la prima condizione, $x + y = a$ prima Equazione.

2°. Per la seconda condizione $x - b = y$ seconda Equazione; imperocchè $b = 40$ è la differenza delle incognite x y.

3°. Sostituisco ay nella prima Equazione: il suo valore $x - b$ per avere $x + x - b = a$, ovvero $2x - b = a$, aggiungendo b da una parte, e dall'altra ho $2x = b + a$.

4°. Essendo x moltiplicato per 2 divido l'Equazioni per 2, il quoziente è $x \frac{a + b}{2}$

ovvero $\frac{100 + 40}{2} = 70 = x$, ed in conseguenza $y = 30$: poichè $70 + 30 = 100$.

Volendo dire che se si vuol dividere un numero in due quantità, delle quali si sappia la differenza, per sapere quali sieno le due quantità, si fa in questo modo.

Sia il numero 100, la differenza 40 si sommano 40, e 100, ed abbiamo 140, il quale diviso per 2 da il quoziente 70, ed il 70 è la prima quantità incognita ricercata.

Dipoi per trovare la seconda incognita si sottrae

trae il 40, cioè la differenza dal numero incognito 70, e resta 30. Dunque 30 è la quantità minore incognita ricercata, e che sia vero 30, e 70 formano cento, e si vede anche che tra 30 e 70 la differenza è 40.

E qui termino per ora la spiegazione de' Calcoli litterali, o sia dell' Algebra, come ancora la Traduzzione, che ho fatto della medema in Aritmetica. Proseguirò la detta Spiega in altro Volume, che darò alla luce, a Dio piacendo, in appresso.



PAR-



PARTE SECONDA.

Elementi di Euclide, i quali rappresantano le Proprietà de' Numeri.

ELEMENTO VII.

Definizioni.

I.



'Unità è quella secondo la quale ciascheduna di tutte le cose che sono, si dice una.

II.

Il numero è una moltitudine composta di unità.

III.

La parte è un numero del numero, minore del maggiore, quando il minore misura il maggio-

giore: volendo dire quando un numero minore misura il maggiore senz'avanzo come il 4 al 8, il 5 al 10, il 10 al 20 &c.

I V.

Le parti sono quando il numero minore non misura il maggiore ugualmente, come il 5 al 18, che vi entra tre volte, e ne avanzano tre decimottave parti: perchè il 18 è composto di 18. unità.

V.

Numero moltiplice s' intende quando il maggiore è misurato dal minore, come il 10 è moltiplice del 5, perchè due volte 5 fa 10, 20 poi è moltiplice del 10: perchè il 20 contiene due volte il 10, e detto 20 è anche moltiplice del 4 e 5. 4 e 5 poi sono parti del 20.

V I.

Il numero paro è quello, il quale si divide in parti uguali, come il 16 si divide in 8, e 8, 24 in 12 &c.

V I I.

Il numero imparo è quello il quale non si divide in due parti uguali, come 11, 13, 15, &c. i quali non si possono dividere in due parti uguali.

VIII.

VIII.

Il numero paro paro è quello il quale è misurato da un numero paro per un numero paro; come il numero 32, che lo misura 8 e 4 ambedue pari: poichè 8 per 4 formano 32.

IX.

Il numero paro imparo è quello ch'è misurato da un numero paro per un numero imparo: come il 30 è paro imparo perchè lo misura il numero paro 6 per l'imparo 5. Vi sono alcuni numeri e pari pari, e pari impari, come il 24 ch'è paro quando è misurato da 4 e 6; perchè chiaramente si vede che 4 moltiplicato per 6 fa 24. E paro imparo quando viene misurato da 3, e 8; 3 numero imparo, e 8 numero paro: ed anche 3 moltiplicato per 8 fa 24.

X.

Il numero imparo imparo è quello ch'è misurato da un numero imparo per un numero imparo, come il 15, il quale è misurato da 3 e 5, il 21 da 3 e 7, il 27 da 3 e 9 &c.

XI.

Il numero primo è quello, che lo misura

la

la ſola unità come il 7, 11, 13, 17 &c.

XII.

Numeri primi tra loro ſono quelli, che hanno per commune miſura la ſola unità, ancorchè abbiano altri numeri, che li miſurino; come 8 e 25 hanno ambedue altri numeri miſuratori. L' 8 vi ha 2 e 4, il 25 ha il 5: ma di ugual miſura altro non hanno che la ſola unità.

XIII.

Il numero compoſto è quello, che lo miſura alcun numero oltre l' unità.

XIV.

Numeri compoſti fra di loro ſono quelli, i quali hanno un medeſimo numero per commune miſura, come 15 e 24, i quali hanno il 3 per commune miſura.

XV.

Il numero ſi dice moltiplicare il numero quando quello ch'è moltiplicato tante volte ſarà compoſto, quante unità ſono nello ſteſſo moltiplicante, e ſarà procreato qualche altro numero: come 6 moltiplicato per 8 crea 48, dove il 6 è compoſto di 6 unità, e l' 8 ſi raddoppia ſei volte quante ſono le unità, e forma

ma

ma 48. Si dice dividere il numero quando ſarà preſo un numero, il quale colle ſue unità dimoſtrerà quante volte il numero dividendo è contenuto nel diviſore: come il numero 6 divide il numero 48 in otto parti, cioè in otto unità; vale a dire contato otto volte il 6 forma 48. Così diviſo il numero 48 per 6 procrea il numero 8.

XVI.

Quando due numeri moltiplicandoſi fra di loro faranno un altro, quello che ſarà fatto ſi chiamerà piano: quelli numeri poi, i quali ſcambievolmente ſi moltiplicheranno, ſi diranno lati di quello, come ſarebbe 6 moltiplicato per 4 forma 24, ed il 24 ſi chiama numero piano: 4 e 6 poi ſono lati. Vero è che un numero piano può avere più lati: perche può eſſere moltiplicato da diverſi numeri, come il medemo 24 che ſi forma da 4 moltiplicato per 6, da 8 per 3, e da 12 per 2.

XVII.

Quando poi tre numeri moltiplicandoſi ſcambievolmente formeranno qualche altro numero, quello che ſarà procreato, ſi chiamerà ſolido. Quelli numeri poi che ſi moltiplicheranno fra loro ſi chiameranno lati, come queſti tre numeri 2, 3, 4 tra di loro moltiplicati, producono 24: imperciocchè due volte 3 fa 6, quattro

vol-

volte 6 fa 24: o veramente due volte 4 fa 8, tre volte 8 fà 24, come anche tre volte 4 fa 12, e due volte 12 fà 24.

XVIII.

Il numero quadrato è quello, il quale ugualmente è uguale a quello, il quale ſta contenuto ſotto due numeri uguali: come ſarebbe il numero 5 moltiplicato per 5 produce 25, vale a dire qualunque numero moltiplicato per ſe ſteſſo, il prodotto ſi chiama Quadrato, come 4 moltiplicato per 4 fa 16: ed il 16 ſi dice Quadrato del 4, ed il 4 Radice quadrato del 16; e così degli altri.

XIX.

Il Cubo è quello ch'è ugualmente uguale, ovvero quello che ſotto tre numeri uguali ſi contiene: vale a dire 3 moltiplicato per 3 fa 9, e 9 moltiplicato per 3 fa 27, ed il 27. ſi chiama numero Cubo del 3. Il 3 poi ſi dice Radice cuba del 27. E tal nome gli vien dato da tutti gli Aritmetici, e Geometri.

XX.

Numeri proporzionali ſono quando il primo è ugualmente moltiplice del ſecondo, ed il terzo del quarto, oppure la medeſima parte, o le medeſime parti; ancora quando il primo contie-

tiene ugualmente il secondo, ed il terzo contiene ugualmente il quarto: e di più la medesima parte, o le medesime parti.

Con questo ci dimostra Euclide quali sieno i numeri proporzionali Geometrici, e sono quando il primo è moltiplice del secondo, come sarebbe 8. 4 :: 6. 3. Perche 8 contiene il 4 due volte, ed il 6 contiene parimenti il 3 due volte: e per dimostrare con più chiarezza che i detti quattro numeri sieno proporzionali, la moltiplicazione degli Estremi, cioè 8 e 3 che formano 24 sia uguale alla moltiplicazione de' Medj 4 e 6 che fanno pure 24. e questa chiamasi proporzione moltiplice. La Proporzione poi submoltiplice sarebbe 4. 8 :: 3. 6 perchè il 4 è parte del 8, ed il 3 è parte del 6 come ancora 4. 12 :: 3. 9. perche il 12 contiene il 4 tre volte, ed il 9 contiene il 3 tre volte, ed in una proporzione geometrica, la moltiplicazione de' Medj è sempre uguale a quella degli Estremi.

XXI.

Numeri piani, e solidi simili sono quelli che hanno i lati proporzionali.

Acciocchè il piano numero sia simile ad un altro piano numero, non è necessario, che qualsivogliano due lati di quello, sieno proporzionali a qualsivogliano due lati di questo; ma basta che quello abbia alcuni due lati, i quali sieno proporzionali ad alcuni due lati di que-

sto: imperciocchè in questa maniera le loro latitudini saranno proporzionali alle loro longitudini; se saranno ridotti in forma piana siccome esiggono i lati presi, come succede ne' numeri piani 24, e 6, i quali sono simili: poichè i lati di quello 6 e 4 sono proporzionali ai lati di questo 3 e 2 quantunque a questi medesimi non sono proporzionali gl' altri lati di quello 8 e 3, 2, e 12, come già abbiamo detto che il 24 ha più lati, e sono 4 moltiplicato per 6, che forma 24. 3 per 8 produce 24, 2 per 12 produce anche 24. Il 6 poi ha solo due lati, e sono 3 e 2: poichè due volte 3 fa 6, e questi 3 e 2 sono proporzionali a 4 e 6; imperciocchè il 4 contiene due volte il 2, ed il 6 due volte 3.

XXII.

Il numero perfetto è quello ch' è uguale alle parti di sestesso.

Quel numero a cui tutte le sue parti aliquote prese insieme sono uguali, si chiama da Mattematici Numero perfetto: siccome sono questi numeri 6, 28., 496; Imperciocchè il primo contiene queste parti aliquote solamente 1, 2, 3 le quali prese insieme formano il numero 6. Le parti poi del secondo numero sono queste 1, 2, 4, 7, 14. la Somma de' quali forma il numero 28. Finalmente il terzo numero ha queste parti aliquote 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, le quali tutte sommate

mate insieme compongono il numero 496. Che se tutte le parti aliquote di qualche numero prese insieme sono maggiori dell' istesso numero, questo numero si dice abbondante: se poi le parti prese insieme sono minori, si dice diminuto.

XXIII.

Si dice il numero misurare il numero per quel numero, il quale il moltiplicante produce quello; come il numero 4 si dice misurare il numero 12 per 3, perchè moltiplicato il 4 per 3 produce 12. Ciò poi rendesi più manifesto in questa maniera; quando il numero 4 misura il numero 12 per 3 farà 4 esso 12 tante volte, quante volte l' unità è contenuta nel 3.

XXIV.

Proporzione de' numeri è una certa abitudine di un numero ad un altro, secondo che è moltiplice di quello, o parte, o parti, oppure contiene quello una volta, o alquante volte, e di più alcuna parte di quello, o alcune parti.

Come per esempio se si paragona il numero 20 con il numero 4 per quella ragione, con la quale è moltiplice di quello, cioè a dire quintuplo, si chiamerà questa comparazione, o abitudine, e proporzione: così ancora proporzione sarà quell' abitudine colla quale il medesimo numero 20 si paragona col numero

60 secondo che esso 20 è terza parte di detto 60: e così degli altri.

XXV.

Quando tre numeri saranno proporzionali, si dice che il primo abbia dupplicatá Ragione al terzo di quello che ha al secondo: ma quando saranno quattro numeri proporzionali, si dice che il primo abbia triplicata ragione al quarto, che abbia al secondo; e così degli altri finchè vi sarà la proporzione.

Euclide in questa Definizione ci dimostra che essendo tre numeri proporzionali, come sarebbe 2, 4, 8 il primo abbia dupplicata ragione al terzo, di quella che ha al secondo: perchè da 2 a 4 vi è una raggione, cioè a dire un 2 ch' è la ragione, che ha il 2 al 4: da 4 a 8 vi corre 4, che detto 4 è la ragione che passa tra 4 e 8. Dunque da 2 a 8 ci devon passare due ragioni, e sono 2 e 4, e perciò si dice che il primo al terzo abbia dupplicata ragione, che ha il primo al secondo: perche dal primo al secondo ci passa il solo 2, e dal primo al terzo vi passa il 2 e il 4.

XXVI.

Posti in ordine quanti si voglia numeri, la Proporzione del primo all'ultimo si dice comporsi dalle Proporzioni del primo al secondo del secondo al terzo, del terzo al quarto, e così

così in appresso fintanto che vi sarà Proporzione.

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Se proposti due numeri inuguali si levi sempre il minore dal maggiore con certa scambievole detrazzione, nè mai il restante misuri il precedente fintantoche non si sia pervenuto all' unità, quei numeri proposti da principio saranno primi fra di loro.

Sieno due numeri inuguali come sarebbe 13, e 5 si deve levare il minore dal maggiore quanto si può. Da 13 detraggo due 5, rimane 3, 3 è minore del 5: dunque detraggo poi 3 da 5 rimane 2 minore del 3. Allora levo 2 da 3 rimane 1. Ed eccoci pervenuti all' unità. Dunque i primi numeri 13 e 5 sono primi fra di loro.

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE II.

Dati due numeri non primi fra di loro, ritrovare la massima commune misura di quelli.

Sieno due numeri 22, e 8 non primi fra di loro, de' quali bisogni ritrovare la massima commu-

mune misura, si levi il minore 8 dal maggiore 22 quante volte si può, e resta 6, detto 6 sottratto dal 8 rimane 2, e detto 2 è la massima commune misura di quelli; e così degli altri, sempre si sottrae il minore dal maggiore con una scambievole detrazzione, nella quale si può arrivare al numero, il quale misura i precedenti.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE III.

Dati tre numeri non primi frà di loro, ritrovare la massima loro commune misura

SIeno tre numeri 16, 12, e 6 non primi tra loro, dei quali è di bisogno trovare la massima commune misura. Sia 4 la massima misura dei numeri 16, e 12: se dunque il 4 misura i due numeri 16, e 12, non misura il 6, ma detratto 4 da 6 rimane 2, e questo 2 è commune misura di 6, 12, e 16.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE IV.

Ogni numero il minore del maggiore è parte, o parti d'ogni numero.

SE fossero due numeri 7, e 10, 7 minore, 10 maggiore: non avendo altra commune mi-

misura che l'unità, il 7 si dice esser parti del 10: perchè contiene 7 parti di esso 10, e perchè la commune misura di questi è l'unità, si dice esser numeri primi fra di loro. Se poi fossero due altri numeri non primi fra di loro, come fosse 5, e 10, il 5 si dice parte del 10; perchè il 10 è contenuto da due 5 senza avanzo.

TEOREMA III.

PROPOSIZIONE V.

Se un numero sarà parte di un numero, ed un altro numero sarà la medesima parte di un altro numero; l'uno, e l'altro insieme sarà la medesima parte dell'uno, e dell'altro, la quale è di un solo.

IN questo Teorema Euclide ci dimostra che quella istessa parte che ha il numero 6 al numero 12, quella istessa ha il numero 4 al 8, perchè il 6 è la metà di 12, ed il 4 è parimente la metà di 8; dipoi 8, e 12 formano 20; 4, e 6 formano 10, e la medesima ragione che ha il 4 al 8, ed il 6 al 12, quella medesima passa tra il 10, e il 20.

TEOREMA IV.

Proposizione VI.

Se il numero sarà parti del numero, un altro numero sarà le medesime parti di un altro numero, ancora l' uno e l' altro insieme saran le medesime parti dell' uno, e dell' altro insieme, le quali sarà uno di uno.

SE saranno i numeri 6, 8, 9, 12 dico che il 9 diviso in tre parti, il 6 ne contiene due, e così il 12 diviso in tre parti, l' 8 ne contiene due parti, avanzando ad ambedue una terza parte, e così sommati poi 6, e 8 forma 14, e sommati 9, e 12 forma 21: dipoi dividiamo il 21 in tre parti, il 14 ne contiene due, e ne avanza pure una terza parte. Dunque come è il 6 al 9, e l' 8 al 12; così medesimamente il 6, e 8, che fa 14 è rispetto al 21.



TEO-

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE VII.

Se un numero sarà parte del numero quale il tolto dal tolto, ancora il restante sarà la medesima parte del restante, quale il tutto dal tutto.

SIA il numero 6 parte del numero 12, tolto dal 12 il numero 8, e dal 6 tolto il 4: dico, che resta 2, e 4: e siccome il 6 è parte del 12, e 4 tolto dal 6 è la medesima parte di 8 tolto dal 12: così 2 rimanente al 6 è la medesima parte del 4 rimanente all'8. Dunque siccome 6 è parte del 12, e 4 tolto dal 6 è parte dell'8 tolto dal 12; così 2 è parte del 4, come il 6 tutto è parte del 12 tutto.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VIII.

Se un numero sarà parti di un numero, quale il tolto dal tolto: ancora il restante sarà le medesime parti, quali il tutto del tutto.

SIccome il 24; è parti del 32 così il 18 è parti del 24, perchè il 32 diviso in quat-

tro

tro parti il 24 ne contiene tre ; ed il 24 diviso in quattro parti, il 18 pure ne contiene tre parti. Di più tolto il 24 da 32 avanza 8; e tolto il 18 da 24 avanza 6; e l'istessa ragione, che ha il 24 al 32, quella istessa tiene il 6 all'8: perchè diviso 8 in quattro parti, il 6 ne contiene tre. Dunque siccome il 24 tolto dal 32 è parti del medesimo 32; ed il 18 tolto dal 24 è parti del medesimo 24: così il 6 rimanente del 24 è parti dell'8 rimanente del 32.

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE IX.

Se il numero, sarà parte del numero, e un altro sarà la medesima parte di un altro: ancora scambievolmente quella parte, o parti, che sarà il primo del terzo, la medesima parte, o le medesime parti sara il secondo del quarto.

SE sono i numeri 4, 3, e 2 dico che il 4 sia la medesima parte del 8 che il 3 del 6, e il 2 del 4: di più 4, 3, e 2 formano 9, e 8, 6, e 4 formano 18, il detto 9 è la medesima parte del 18 che il 4 del 8, 3 del 6, e 2 del 4. Di più ancora la ragione che tiene il 3 al 4, quella stessa tiene il 6 al 8.

TEO-

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE X.

Se un numero sarà parti del numero, ed un altro numero sarà le medesime parti di un altro numero, ancora vicendevolmente quelle parti, o parte che è il primo del terzo, le medesime parti, o parte sarà il secondo del quarto.

VUol dire che siccome il 4 è parte del *6*, così il 10 è parte del 15: volendo dire che diviso il *6* in tre parti, il 4 ne contiene due, e diviso il 15 in tre parti, il 10 ne contiene anche 2. Così ancora la metà di 4 è 2, il quale 2 è la terza parte del *6*, così la metà di 10 è 5, ed il 5 è parimente la terza parte del 15.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE XI.

Se sarà come il tutto al tutto, così il tolto al tolto, parimente il rimanente sarà al rimanente come, il tutto al tutto.

SIccome tutto il numero 18 è moltiplice del numero 9 perchè il 18 contiene il 9 due vol-

volte così da 18 leviamo 12 rimane 6, da 9 leviamo 6, rimane 3, e siccome il 12 contiene due terze parti del 18, così il 6 contiene due terze parti del 9, e siccome il 18 è contenuto da due 9, così il 12 è contenuto da due 6, e come il 9 è metà del 18; così il 6 è metà del 12, ed il 18 è moltiplice del 9, così anche il 12 è moltiplice del 6, e leviamo una terza parte al 18, cioè un 6, e togliendo una terza parte al 9, cioè un 3, al 18 rimane 12, e al 9 rimane 6, e così il rimanente 6 e 12 formano il tutto 18.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE XII.

Se sono quanti si voglia numeri proporzionali, come sarà l' uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti saranno a tutt' i conseguenti.

COme sarebbe il 4 al 8, il 2 al 4, il 3 al 6 cioè a dire il 4 antecedente metà del 8 conseguente, il 2 antecedente metà del 4 conseguente, il 3 antecedente metà del 6 conseguente, così gli antecedenti 4, 2, 3 uniti fanno 9, ed 8, 4, 6 conseguenti uniti fanno 18. Gl' antecedenti uniti, cioè 9 faranno la metà de' conseguenti uniti, cioè 18

TEO-

TEOREMA XI.

Proposizione XIII.

Se vi sono quattro numeri proporzionali, ancora saranno proporzionali scambievolmente.

QUesta Proposizione ci dimostra, che siccome 3, e 6 sono numeri proporzionali, perchè il 3 è metà di 6; 4, e 8, sono anche proporzionali: perchè il 4 è parimenti metà dell' 8, così ancora 6 e 3 fanno 9, e 4 e 8 fanno 12; e 9, e 12 sono scambievolmente proporzionali: perchè diviso il 12 in quattro parti, il 9 contiene tre parti del 12. Dipoi siccome 8 diviso in quattro parti, il 6 ne contiene tre parti, e così il 3. contiene tre parti del 4.

TEOREMA XII.

Proposizione XIV.

Se vi sono quanti si voglia numeri, ed altri uguali a quelli in moltitudine, i quali si prendono a due a due nella medesima ragione: saranno ancora nella medesima ragione per l' uguaglianza.

SIA 12, 8, 4, e 9, 6, 3 dico che l'istessa ragione che ha il 12 al 8; quell' istessa ha il 9 al 6; perchè il 12 è composto di

tre

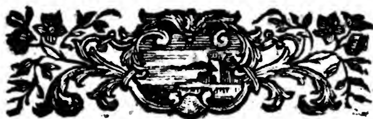
tre 4, e l'8 ne contiene due: così il 9 composto di tre 3, e similmente il 6 ne contiene due: e siccome poi il 4 è la terza parte di 12, così il 3 è la terza parte di 9. E siccome poi il 4 è la quarta parte di 16, così il 3 è la quarta parte di 12, ed abbiamo spiegato abbastanza.

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XV.

Se l'unità misura qualche numero ugualmente, poi un altro numero misuri qualche altro numero ancora a vicenda ugualmente; l'unità misurerà il terzo numero, il secondo, ed il quarto.

Sieno dunque l'unità 1, e sieno 2, 3, 6 dico che l'unità misura il 2, il 3, ed il 6: di più siccome l'1 misura tre volte il 3: così il 2 misura tre volte il 6, e diviso il 6 in tre parti, cioè 2, 2, 2 dico che l'unità misura tanto il 6 diviso, che unito.



TEOREMA XIV.

Proposizione XVI.

Se due numeri vicendevolmente frà di loro moltiplicandosi produrranno alcuni, i prodotti da loro saranno uguali frà di se.

Sia 3, e 4 tra di loro l' uno coll' altro moltiplicati; cioè 3 moltiplicato per 4 che fa 12, e 4 per 3 che fa pure 12; imperocchè in ambedue i modi producono un numero uguale.

TEOREMA XV.

Proposizione XVII.

Se un numero moltiplicando due numeri ne formerà alcuni, i prodotti da questi avranno la medesima ragione che i moltiplicati.

Questa Proposizione ci dimostra come, per esempio, il 3 moltiplicando il 2 forma il 6, così il medemo 3 moltiplicando il 4 formerà il numero 12: E chiaramente si vede che la medesima ragione che hanno i prodotti cioè 6 e 12 hanno ancora i moltiplicati 2, e 4 perchè la ragione che ha il 2 al 4, quella medema ha il 6 al 12; cioè il 2 è metà

tà di 4, ed il 6 metà di 12; e questa si chiama ragione suddupla.

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se due numeri moltiplicando qualche numero produrranno alcuni, i prodotti da questi avranno la medesima ragione che i numeri moltiplicati.

SE per esempio due numeri 4, e 5 moltiplicheranno un altro numero come fosse il 3, vale a dire 4 moltiplicato per 3 fa 12, e 5. per 3. fa 15, l'istessa ragione che hanno i moltiplicanti, cioè 4, e 5 avranno i prodotti 12, e 15 perchè il 5 diviso in cinque parti, il 4 ne contiene quattro parti, ed il 15 diviso in cinque parti il 12 ne contiene parimente quattro parti.



TEO-

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XIX.

Se quattro numeri ſaranno proporzionali, quel numero, il quale ſi forma dal primo, e dal quarto ſarà uguale a quello, il quale ſi forma dal ſecondo, e dal terzo; E ſe quel numero il quale ſi fa dal primo, e dal quarto ſarà uguale a quel numero il quale ſi fa dal ſecondo, e dal terzo, eſſi quattro numeri ſaranno proporzionali.

SIeno quattro numeri proporzionali 3. 2. 6. 4. dico, che 3 moltiplicato per 4 fa 12, e 2 per 6 parimente fa 12: dipoi l' iſteſſa ragione, che ha il 3 al 2, quella iſteſſa ha il 6 al 4: perchè il 3 contiene una volta il 2, e ne avanza una terza parte, così il 6 contiene una volta il 4, e ne avanza una terza parte: dipoi tre volte 6 forma 18, e tre volte 4 forma 12. Così il 18 contiene una volta il 12, e ne avanza pure una terza parte: E per conoſcere ſe i quattro numeri ſieno veramente proporzionali, il prodotto, che riſulta dalla moltiplicazione degli Eſtremi, deve eſſere uguale a quello de' Medj, come nel noſtro eſempio 3 per 4 fa 12, e 2 per 6 fa 12.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

I numeri minimi di tutti quelli, che hanno la medesima ragione con loro, misureranno ugualmente i numeri, che hanno la medesima Ragione con quelli, il maggiore il maggiore, il minore il minore.

Sieno i numeri 5 e 3 minimi, in proporzione degli altri due numeri maggiori cioè 10, e 6 dico, che diviso il 5 in cinque parti, il medesimo 5 contiene il 3. una volta, e ne avanzano due quinte parti, così il 10 diviso in cinque parti, il detto 10 contiene il 6 una volta, e ne avanzano pure due quinte parti. Dico poi, che il 3 ha la medesima ragione al 6, che ha il 5 al 10 perchè il 3 è metà di 6, ed il 5 è metà di 10, e questa ragione si chiama subdupla. Dunque l' istessa ragione, che ha il maggiore al maggiore, la medesima ha il minore al minore.



TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XXII.

Se saranno tre numeri, ed altri uguali ad essi in moltitudine, i quali si pigliano a due a due nella medesima ragione, sia perturbata la loro proporzione, ancora per ugualità saranno nella medesima Ragione.

SIeno i numeri 4, 6, 8, i quali hanno proporzione col numero 10, come hanno proporzione i numeri 2, 3, 4 col numero 5; diviso il 10 in cinque parti, il 4 ne contiene due, così il 2 contiene due parti del 5: dipoi il 6 delle 5 parti del 10 ne contiene tre, così nel 3 si contengono tre parti del 5: dipoi 8 contiene quattro parti delle cinque parti del 10, e nel 4 si contengono quattro parti del 5. Dunque sommati insieme 4, 6, 8 formano 18, e sommati insieme 2, 3, 4 formano 9, e la proporzione che ha il 18 al 9, quella istessa ha il 10 al 5 perchè il 18 è doppio del 9, e così il 10 è doppio del 5. come nell'esempio apparisce, che 9 moltiplicato per 10 fa 90, e 18 per 5 fa pure 90. Così anche 18. 9. 10. 5. moltiplicati fra loro danno i medesimi prodotti, ancorchè sia perturbata la lor Proporzione: come sarebbe anche 2, 4, 8, 12, 3, 6 la ragione che ha l'8 al 2, quella istessa ha il

12 al

12 al 3. Perchè il 2 è la quarta parte del 8, ed il 3 anche è la quarta parte del 12, e la medema ragione, che ha il 4 al 8, quella istessa ha il 6 al 12. Così anche quella medema, che tiene il 2 al 4, tiene anche il 3 al 6. Di più 3 per 8 fa 24; 4 per 6 fa anche 24, e 2 per 12 fa pure 24.

Osservazioni.

I.

Se vi sono quattro numeri proporzionali, ancora per ragione inversa, o Convertendo *saranno proporzionali.*

Sieno quattro numeri proporzionali come per esempio 6. 3. = 4. 2. dico proporzionali, perchè la ragione, che ha il 6 al 3, quella istessa ragione ha il 4 al 2. Il 6 contiene due volte il 3, ed il 4 contiene due volte il 2. La ragione poi del 6 al 4 è simile a quella del 3 al 2: perchè delle tre parti del 3, nel 2 se ne contengono due, e così anche delle tre parti del 6 nel 4 se ne contengono due.



I I.

Se i numeri composti sono proporzionali questi ancora divisi saranno proporzionali.

COme 6, e 3 fa 9, e 4, e 2 fanno 6; dal 9 leviamo la terza parte cioè 3, e da 6 leviamo la terza parte, cioè il 2, tanto il 6 contiene una volta il 4, e ne avanza una terza parte ch' è 2, quanto il 3 contiene una volta il 2, e ne avanza una terza parte, cioè una unità.

I I I.

Se i numeri divisi sono proporzionali, questi ancora composti saranno proporzionali.

SIa 6. 3. = 4. 2., i quali di già abbiamo detto esser questi numeri proporzionali anche in ragione composta, che sarebbe 6 e 3 fa 9, e 4 e 2 fa 6. Dunque 6 : 3. = 4. 2.
9. 3. = 6. 2.
e chiaramente si vede, che sono anche composti proporzionali, perchè 9 per 2. fa 18, e 3 per 6 fa pure 18.

IV.

I V.

Se i numeri composti sono proporzionali, questi ancora per conversion di ragione saranno proporzionali.

SIeno i numeri 6. 3 .= 4. 2. che di già abbiamo detto, che anche composti sono proporzionali cioè 9. 3 = 6. 2, i quali per conversion di ragione sono 6. 9. = 2. 3. dico essere ancora proporzionali, perchè anche in ragione inversa 6 per 3 fa 18, e 2 per 9 fa anche 18.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXIII.

I primi numeri tra di se sono minimi di tutti quelli che hanno la medesima ragione con loro.

SIeno i numeri 7 e 4 minimi di quelli, che hanno la medesima ragione con loro, cioè a dire, che prima del 7 non vi è alcun numero che sia misurato dal 2, e dal 3 coll' avanzo di unità, ed anco prima del 4, non vi è alcun numero che misuri esattamente il 2. E chiaramente si vede essere il 4 e 7 numeri primi tra di se, non avendo questi altro numero per misura che la sola unità.

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXIV.

I numeri minimi di tutti quelli, che hanno la medesima ragione fra di loro sono primi fra di se.

Sieno i numeri 8 e 5 minimi di tutti quelli, che hanno la medesima ragione con loro, perchè non vi è numero prima del 8, che sia misurato esattamente dal 4, e così neppure vi è numero prima del 5, che sia misurato dal 4 coll'avanzo di una unità: ed essi 5, 8 sono primi tra di se, non avendo altro per commune misura che la sola unità.

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXV.

Se saranno due numeri primi fra di se quel numero che misurerà uno di loro sarà primo all' altro.

Sieno dunque due numeri primi tra di se come fosse 8 e 5, e 4 poi sia quel numero, che misura uno di loro, cioè l' 8. Dico che il detto 4 sarà al 5 numero primo, perchè il 4, e 5 non hanno altra commune misura che la sola unità. Così anche se si misura l' 8 col 2, anche il 2 sarà primo al 5.

TEO-

TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se due numeri saranno primi rispetto ad alcuno, ancora il generato da quello sarà primo rispetto al medesimo.

Sieno i numeri 7, e 3 primi tra di se, e sieno primi rispetto ad un altro, come sarebbe all'8 dico, che il generato da 7, e 3 qual'è 21 sarà esso 21 primo rispetto al 8, perchè sì l'8 che il 21 non hanno altra commune misura, che la sola unità.

TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se due numeri saranno primi tra di se, ancora il generato da uno di loro sarà primo rispetto all'altro.

Sieno i numeri 4, e 7 primi tra di se, ed uno di loro ne generi un altro, come fosse il 4, che moltiplicandolo per se stesso genera il 16; dico essere il 16 primo rispetto al 7 perchè di lor commune misura altro non hanno che la sola unità: e così il 7 moltiplicandolo per se stesso genera 49 numero primo rispetto al 4 non essendovi altra commune misura tra 4, e 49 che la sola unità.

TEO-

TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Se due numeri saranno primi rispetto a due altri, l' uno, e l' altro, all' uno, ed all' altro, ancora quelli che saranno generati tra loro saranno primi tra di se.

Sieno due numeri 5 e 3, i quali saranno primi rispetto a due altri 4, e 2 dico il 4 esser primo rispetto al 5, e 2 rispetto al 3: 5, e 3 generano 15, perchè 3 per 5 fa 15, e così 4 per 2 genera 8. dico ancora essere 8 e 15 primi tra di se.

TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXIX.

Ogni primo numero è primo rispetto ad ogni numero che non misura.

Come per esempio fosse 5, e 8 dico che il 5 è primo al 8, perchè il detto 5 non misura l'8.



TEO-

TEOREMA XXVIII.

PROPOSIZIONE XXX.

Se saranno due numeri primi tra di se, e l'uno, e l' altro moltiplicando sestesso abbia fatto un altro, ancora i generati da questi saranno primi tra di se: e se quelli, che in principio moltiplicando essi generati avranno fatto alcuni altri, ancora questi saranno primi tra di se, e questo sempre accade circa gli Estremi.

Sieno i numeri 3, e 2 primi tra di se, dico, che moltiplicando il 3 per 3 fa 9, e 9 per 3 fa 27, e 27 per 3 fa 81, e 81 per 3 forma 243: di poi 2 per 2 fa 4, 4 per 2 fa 8, 8 per 2 fa 16, e 16 per 2 forma 32; dico come i numeri 3, e 2 sono primi tra di se, così anche il 9 al 4, il 27 al 8, il 16 al 81, il 243, al 32, e gli Estremi che sono 3 e 2, e 243, e 32, il 2 col 243 sono primi tra di se, come anche il 3 al 32.



TEO.

TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXI.

Se due numeri saranno primi tra di se, ancora l'uno e l'altro insieme sarà primo a qualsivoglia di loro: e se l'uno e l'altro insieme sarà primo rispetto ad alcuno di quelli, ancora quei numeri posti in principio saranno primi tra di se.

SE fossero due numeri come 7 e 4 primi tra di se, sommati insieme formano 11, e detto 11 è primo tanto rispetto al 7, che al 4, e quando i detti due numeri 7, e 4 sommati insieme faranno un numero primo rispetto ad alcuni di quelli, sarà segno chiaro che i due primi numeri 7 e 4 sono primi tra di se.

TEOREMA XXX.

PROPOSIZIONE XXXII.

Se due numeri moltiplicandosi tra di se formano un altro, ed il formato da questi sia misurato da alcun primo numero, questo ancora misurerà un di quelli, i quali sono posti in principio.

SIeno due numeri 4, e 6 i quali moltiplicandosi fra loro generino un altro, come

si

si vede che 4 moltiplicato per 6 forma 24. Se detto generato cioè 24 sia misurato da un numero primo, come è il 24, ch'è misurato dal 3 numero primo, questo 3 misura ancora un di quelli posti in principio, e chiaramente si vede che il 3 misura il 6.

TEOREMA XXXI.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Ogni numero composto lo misura qualche primo numero.

CHiaramente si vede che ogni numero composto è misurato da qualche numero primo, come sarebbe il 18, che tra gli altri numeri che lo misurano vi è anche il numero 3 ch'è numero primo.

TEOREMA XXXII.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Ogni numero o è primo, o lo misura qualche numero primo.

SIA qualsivoglia numero; per esempio sia il 18, o qualunque altro, certamente o è primo, o lo misura qualche numero primo; perchè come il 18 se fosse primo lo misurarebbe l'unità, e non essendo primo lo misura il 3 nume-

numero primo, e così di ogni altro.

TEOREMA XXXIII.

Proposizione XXXV.

Se due numeri misurano qualche numero, ancora un numero minimo misura quel medesimo che misurano quelli.

Sieno i numeri 2, e 3 i quali misurano il 6, e sia ancora un altro numero come fosse 18; dico che il 6 numero minimo misura ancora il 18, come lo misurano il 2 e 3.

TEOREMA XXXIV.

Proposizione XXXVI.

Se alcun numero misurerà un numero; quello il quale misura, avrà la parte denominata del misurante.

Come sarebbe il 12 ch' è misurato dal 4 tre volte, dico che il 12 ha per parti aliquote il 4, ed il 3, perchè il 4, ed il 3 sono parti denominate del 12; perchè tre volte 4 forma 12: dico ancora, che il 12 è misurato dal 2 sei volte: volendo dire che il 12 ha la parte denominata cioè la seconda ch' è il 6, la terza è 4, la quarta è 3.

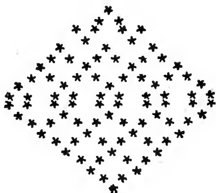
TEO-

TEOREMA XXXV.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Se un numero avrà qualsivoglia parte, lo misurerà un numero denominato dalla parte.

AVrà il numero 15 quella parte, che denominerà il 5, perchè cinque volte 3 forma 15, e tre volte 5 forma pure 15.



ELEMENTO VIII.

TEOREMA I.

Proposizione I.

Se saranno quanti si voglia numeri di seguita proporzione, e gli Estremi poi di essi sieno primi tra di se, essi sono minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proporzione con loro.

I Numeri di continua proporzione qualunque sieno v.g. 8, 12, 18, 27; dico essere gli Estremi 8 e 27 primi tra di se, e perciò 8. 12. 18. 27. sono minimi di tutti quelli che hanno la medesima ragione con loro.

PROBLEMA I.

Proposizione II.

Ritrovare numeri minimi di seguita proporzione quanti si vogliano.

Sieno i numeri minimi 2 e 3 di seguita proporzione, bisogna ritrovare tre numeri minimi in proporzione di 2, e 3: moltiplico il 2 per sestesso, produce 4: dipoi due volte 3 produce 6, e tre volte 3 produce 9, ed ecco tre numeri minimi in proporzione di 2 e 3, e sono 4, 6, 9. TEO-

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE III.

Se sieno quanti si voglia numeri di continua proporzione minimi di tutti quelli, che hanno la medesima ragione con loro, gli Estremi di quelli sono primi fra di se.

SIeno i numeri 8, 12, 18, 27 minima di continua proporzione dico che gli Estremi 8, e 27 sono primi tra di se.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE IV.

Date quante si voglia ragioni nei numeri minimi, ritrovare numeri minimi continuati nelle date ragioni.

SIeno primieramente date due ragioni nei numeri minimi 6, 5, 4, 3; 24, 20. 15. per ritrovare i numeri minimi continuati nelle loro ragioni, dico che 6 per 4 fa 24, 5 per 4 fa 20, e 3 per 5 fa 15, e così il 6 e 4 sono di ragione minima di 24, il 5 e 4 sono in ragione minima di 20, e 5 e 3 parimenti in ragione minima di 15, e così hanno i detti 24. 20. 15. due ragioni per ciascheduno, per-

chè il 24 ha la ragione, di 4 e 6, il 20 di 4 e 5, il 15 di 3 e 5.

TEOREMA III.

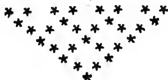
PROPOSIZIONE V.

I numeri piani hanno ragione composta tra di se dai lati.

SIeno due numeri piani 24, 48, ed i lati 4, 6, 3, 8; dico questi numeri piani avere raggioni composte dai lati perchè

24	48
18	
4. 6.	3. 8.

6 per 4 fa 24, e 6 per 8 fa 48: di più 6 per 3 fa 18. L'istessa ragione che ha il 18 al 24 ha il 6 al 8 perchè diviso il 24 in quattro parti il 18 ne contiene tre parti: così diviso l'8 in quattro parti, il 6 ne contiene tre parti, ed ancora il 4, 6, 3, 8 misurano tanto il 24, che il 48.



TEO-

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE VI.

Se vi sieno quanti si voglia numeri continuati proporzionali, ed il primo non misuri il secondo, nè anche alcun altro misurerà nessuno.

16 , 24 , 36 , 54 , 81
4. 6. 9.

Sieno di continua proporzione sicco- me il 16 non misura il 24, così nemmeno gli altri: perchè il 24 neppure misura il 16, neppure il 36 il 54, nè il 54 l'81; perchè il 24 diviso in tre parti, il 16 ne contiene solamente 2, e così il 36 diviso in tre parti il 24 ne contiene due, e similmente il 54 diviso in tre parti, il 36 ne contiene solamente due, ed 81 diviso in tre parti, il 54 ne contiene solamente 2: e chiaramente si vede essere in continua proporzione i detti numeri; perchè metà di 16 ch'è 8 unito al 16 fa 24, metà di 24 è 12 che unito al 24 fa 36, metà di 36 è 18 che unito al 36 fa 54, metà di 54, è 27 che unito al 54 forma 81: ed abbastanza abbiamo dimostrato essere i dati numeri di continua proporzione.

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE VII.

Se sieno quanti si voglia numeri continuati proporzionali, il primo poi misuri l'Estremo, questo ancora misurerà il secondo.

SIeno di continua proporzione 3, 6, 12, 24, 48; dico che il primo cioè il 3 misura il 48 estremo senz'avanzo; perchè 3 per 16 fa 48, ed il detto 3 misura ancora il 6 secondo: perchè due volte 3 fa 6.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VIII.

Se tra due numeri accaderanno numeri medj di continua proporzione, quanti numeri medj di continua proporzione, cadono tra quelli altrettanti Medj di continua proporzione caderanno tra gli altri che hanno la medesima ragione con quelli.

CAdano tra due numeri 24, e 81 due Medj di continua proporzione, e sieno 36, e

54.

24: 36: 54: 81: 54: perchè metà di 24 è 12 che unito al 24 fa 36
8: 12: 18: 27: metà di 36 è 18, che unito al 36 fa 54, metà di 54 è 27 che unito al 54 fa 81. Vi sono altri numeri di continua proporzione, che hanno la medesima ragione con quelli, e sono 8, e 27; i due Medj sono 12, e 18; dico che hanno la medesima ragione con quelli: perchè 8 metà è 4, che unito al 8 fa 12, metà di 12 è 6, che unito al 12 fa 18, metà di 18 e 9, che unito al 18 forma 27. Dipoi 3 per 8 fa 24, 3 per 12 fa 36, 3 per 18. 54, e 3 per 27 fa 81.

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE IX.

Se due numeri sieno tra di se primi, e tra quelli caderanno numeri Medi di continua proporzione, quanti numeri Medj di continua proporzione caderanno tra quelli, altrettanti Medj di continua proporzione caderanno tra l' uno, e l' altro di loro, e l' unità.

SE tra due numeri primi tra di se, come sarbbe 8 e 27 caderanno numeri Medj di continua proporzione che sarebbe 12, e 18; dico esser questi di continua proporzione; perchè 8 metà di 8 è 4: dunque 8 e 4 fanno 12 metà di

12 è 6 dunque 12 e 6 fanno 18 metà di 18 è 9 dunque 18 e 9 fanno 27 e perciò dico esser 8, 12, 18, 27 numeri di continua proporzione, e quì la proporzione non può passar più oltre, perchè il 27 non si può dividere. Dunque da 8 a 27 i Medj di continua proporzione sono 12, e 18, come di già abbiamo descritto. Dall'unità al 8 sono 2, e 4 perchè 1, e 1 fanno 2, e 2, e 2 fa 4, e tra l'unità ed il 27 i Medj sono 3, e 9 perchè 1 per 3 fa 3, e 3 per 9 fa 27.

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE X.

Se tra due numeri e l'unità caderanno numeri di continua proporzione quanti Medj numeri di continua proporzione caderanno tra l'uno e l'altro di loro, e l'unità, altrettanti Medj di continua proporzione caderanno fra essi.

SE tra due numeri e l'unità caderanno numeri di continua proporzione come fosse tra 81 l'unità e 1296. dico che trà l'unità e 81 ci passa 1. 3. 9 27, perchè 1 per 3 fa 3, 3 per 3 fa 9, e 3 per 9 fanno 27: Dipoi 81, e 81 fanno 162, e 162, e 162 fanno 324. 324 e 324 fanno 648, 648 e 648 fanno 1296. dico poi che 27 e 27 fanno 54, 54 e 54 fanno 108, 108 e 108 fanno 216. Dipoi 9, e

9 18,

9 18, 18, e 18, fanno 36, e 3 e 3 fanno 6 come nel nostro Esempio apparisce.

81 : 162 : 324 : 648 : 1296
27 : 54 : 108 : 216 :
9 : 18 : 36 :
3 : 6 :
1 :

Dunque trà l'unità e 81 passano tre Medj di continua proporzione, e sono 3. 9. e 27. trà l'unità e 1296 ci passano pure tre Medj di continua proporzione, e sono 6. 36. 216. e tra 81 e 1296 ci passano ancora tre Medj di continua proporzione e sono 162, 324, 648.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE XI.

Di due numeri quadrati vi è un numero medio proporzionale, ed il quadrato al quadrato ha dupplicata ragione del lato al lato.

Sieno i due numeri quadrati 9 e 49., il 9. è quadrato del 3, il 49. del 7. perchè 3. per 3. fa 9, e 7. per 7 fa 49, ed i lati sono 3. e 7. I detti lati hanno dupplicata ragione l'un l'altro: dico tra due quadrati cade un numero medio proporzionale, ed è il 21. perchè moltiplicati i lati tra loro, cioè 3. per 7. forma

ne tre parti, e diviso il 16. in quattro parti, il 12. ne contiene parimenti tre parti, ed ancora il 3. contiene tre parti del 4., e chiaramente si vede esservi tra loro ragioni proporzionali.

TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XIII.

Se sieno quanti si voglia numeri di continua proporzione ciascheduno moltiplicando sestesso faccia alcuni altri quelli che saranno prodotti da quelli saranno proporzionali: E se i numeri posti in principio moltiplicando i già fatti faranno altri, Essi ancora saranno proporzionali: e sempre questo accaderà circa gli Estremi.

SIeno i numeri di continua proporzione 2: 4: 8:, e se i detti moltiplicandosi fra loro, come 2: per 2: fa 4:, 4: per 4: fa 16:, e 8: per 8: fa 64: faranno i numeri 4: 16: 64: e questi saranno proporzionali: e se i numeri 2: 4: 8: moltiplicheranno i già fatti 4: 16: 64: faranno altri, saranno pure proporzionali come sarebbe 2: per 2: fa 4:, 2: per 4: fa 8:, 2: per 8: fa 16:, dipoi 4: per 4: fa 16:, e 4: per 16: fa 64:, e 4: per 64: fa 256:, e 8: per 8: fa 64:, e 8: per 64: fa 512:, e 8: per 512: fa 4096: Dunque

que se sieno quanti si voglia numeri di continua proporzione, e moltiplicando ciascheduno sestesso faranno alcuni altri, quelli che saranno prodotti da questi saranno proporzionali, come nell' Esempio si vede

2:	4:	8:
4:	16:	64:
8:	64:	512:
16:	256:	4096:

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIV.

Se il numero cubo misurerà un altro numero cubo, ancora il lato dell' uno misurerà il lato dell' altro: e se il lato dell' uno cubo misura il lato dell' altro, ancora il cubo misura il cubo.

E Misurato 8: ch' è numero cubo dal lato 2: percnè 2: per 2: fa 4: e 2: per 4: fa 8:, ed il cubo 216: è misurato dal 6: perchè 6: per 6. fa 36. e 6. per 36. fa 216., ed i due lati cioè 2. e 6. moltiplicati per sestessi 2. per 2. fa 4. e 6. per 6. fa 36. moltiplicati poi fra loro cioè 2. per 6. fa 12. moltiplicato 12. per lo lato 2. fa 24. e l' istesso 12. moltiplicato per lo lato 6. fa 72. e chiaramente si dimostra che 4. 12. 36., e 8. 24. 72. 216. sono di continua proporzione nella ragione di 2. e 6.

TEO-

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XV.

Se il numero quadrato non misura il numero quadrato; nè anche il lato di uno misurerà il lato dell' altro: e se il lato di un quadrato non misuri il lato dell' altro nè anche il quadrato misurerà il quadrato.

Sieno due numeri quadrati 16, e 81. ed i lati 4. e 9., il 16. non misura il numero 81. dico che nemmeno i lati 4. e 9. hanno misura fra loro: perchè il 4. non misura il 9., e nemmeno il 9. misura il 4. e così nemmeno il 16. quadrato misura il numero 81. quadrato.

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XVI.

Se il numero cubo non misura il numero cubo, nè anche il lato di uno misura il lato dell' altro: e se il lato di un cubo non misura il lato dell' altro nè anche il cubo misurerà il cubo.

Sieno due numeri cubi 8. e 27. ed i lati 2. e 3. dico che come 8. cubo non misura il

il 27. pure numero cubo: così nemmeno il 2. lato non misura il 3. lato.

TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XVII.

Di due numeri piani simili un numero medio è numero proporzionale: ed un piano all' altro piano ha duplicata ragione del lato corrispondente al lato corrispondente.

Sieno i numeri piani simili 12: e 27: ed i lati 6. e 2:, e 9. e 3., imperocchè due volte 6: fa 12: e tre volte 9: fa 27: dico tra 12. e 27: cade un numero medio proporzionale perche due volte 9: forma 18; e tre volte 6: forma anche 18: ed il numero piano 27: ha dupplicata ragione al numero 12: perchè il numero 27 contiene il 12: due volte: dipoi i numeri 12: 18: 27. dico che la ragione che ha il

6: 2: 9: 3:

12: al 18:, quella istessa ha il 18: al 27: perchè diviso il 18: in tre parti il 12· ne contiene due parti: e così il 27: diviso in tre parti il 18: contiene due parti; sicchè il 6: lato diviso in tre parti, il 2: è una terza parte, ed il 9: parimente lato diviso in tre parti, il 3: è una terza parte. Così poi il 6: al 9: ha l'istessa ragione che ha il 2: al 3: perchè il 6: contiene due parti del 9: e così il 2: contiene due parti del 3: di più dico che il 12: 18: 27: so-

RO

no numeri di continua proporzione.

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Di due numeri solidi simili sono proporzionali due numeri Medj, ed il solido al solido ha triplicata ragione del lato corrispondente al lato corrispondente.

Sieno i numeri solidi simili 30: e 240: ed i lati simili 2: 3: 5; imperocchè hanno proporzione ai lati 4: 6: 10: e la ragione che ha il 2. al 3. quella ha il 4: al 6: perchè tanto il 2: contiene due parti del 3: quanto il 4: contiene due parti del 6: e l'istessa ragione che ha il 6: al 10; quella istessa ha il 3: al 5: dico che tra 30: e 240: cadono due Medj proporzionali, e la proporzione che passa tra 30: e 240: è triplicata, e quella che passa tra i lati 2: e 4: corrisponde ai lati 3: e 6: perchè 2: e 2: fanno 4: e 3: e 3: fan 6: e l'istessa tra 5. e 10. Moltiplicando poi 2. per 3. fa 6. e 4. per 6. forma 24. così 3. per 4. fa 12. e 5. per 12. fa 60. e 10. per 12. fa 120. che 2. 3. e 5., e 4. 6. e 10. sono proporzionali, senza meno perchè come è il 2. al 4. così è il 3. al 6. così il 6. al 12. e 12. a 24. così il 30. al 60., 60. al 120. e 120. a 240. e chiaramente si vede che 30. 60. 120. 240. hanno l'un l'altro la ragione dupla, e 60. e 120. sono

fono i due Medj proporzionali.

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XIX.

Se tra due numeri caderà un numero medio proporzionale, quelli numeri faranno piani fimili.

CAda tra 18 e 32. un numero medio proporzionale, e fia il 24. dico che 18. e 32. fono numeri piani fimili poichè 3. e 4. fono minimi in ragione di 18, e 24., ed il 6. mifura ancora il 18. e il 24., e l'8. il 32. dunque 3. per 6. fa 18. e 4. per 8. fa 32. dipoi 18. 24. 32. dico l'ifteffa ragione che paffa trà 3. 4. 6. 8. paffa tra 18. 24., 24. e 32. perchè divifo 24. in quattro parti, il 18. ne contiene tre, e così il 32. divifo in quattro parti il 24. ne contiene tre e 3. per 6. fa 18., 4. per 6. fa 24., 4. per 8. fa 32. così tra i due numeri 18. e 32. cade un numero medio proporzionale ch'è il 24. Dunque 18., e 32. fon piani fimili, e cade tra effi un medio proporzionale, ch'è il 24.

TEO-

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

Se tra due numeri cadono due Medj proporzionali, quei numeri sono solidi simili.

CAdano tra 8 e 27. due Medi proporzionali 12. e 18. dico che 8. e 27. sono due numeri solidi simili perchè per formare l'8 si fa 2. per 2. fa 4. 2. per 4. fa 8. dipoi per formare 27. si fa 3. per 3. fa 9. e 3. per 9. fa 27. come già abbiamo detto che in questa guisa si forma il numero solido, e ne vengono da continua proporzione perchè metà di 8. è 4. che unito al detto 8. fa 12. metà di 12. è 6. che unito al 12. forma 18. metà di 18. è 9. che unito al 18. fa 27. dunque 8. 12. 18. 27. sono numeri di continua proporzione, ed 8. e 27. sono numeri solidi; dipoi 12. e 18. sono i loro Medj.



TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Se tre numeri sono continui proporzionali ed il primo è quadrato , ancora il terzo sarà quadrato .

Sieno tre numeri di continua proporzione ; come 9. 54. 324. ed il primo sia quadrato: dico che il terzo sarà ancora quadrato , e chiaramente si vede essere i detti tre numeri di continua proporzione ; perchè 6. per 9. fa 54 , e 54. per 6. fa 324. che poi 9. 324. sieno quadrati chiaramente si vede che 3. per 3. fa 9. e 18. per 18. fa 324., ed abbiamo abbastanza dimostrato .

TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XXII.

Se quattro numeri sieno continuamente proporzionali , il primo poi sia cubo , ed il quarto sarà cubo .

Sieno quattro numeri proporzionali 27. 45. 75. 125. dico che essendo il primo cubo anche il quarto sarà cubo , e chiaramente si vede che 3. per 3. fa 9. e 3 per 9. fa 27. numero cubo del 3. Dipoi 5. per 5. fa 25. e 25.

per

per 5. fa 125. parimente numero cubo. Che sieno i quattro numeri di continua proporzione si mostra come il 27. diviso in tre parti, il 18. ne contiene due parti, quali unite al 27. formano 45. indi diviso il 45. in tre parti il 30. ne contiene due, che unite al 45. formano 75. parimenti diviso il 75. in tre parti il 50. ne contiene due, che unite al 75. fanno 125. e chiaramente abbiamo dimostrato come il primo sia cubo, ed anche il quarto, e che i quattro numeri sieno di continua proporzione.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXIII.

Se due numeri hanno tra di se quella ragione che passa tra un numero quadrato ad un numero quadrato, ed il primo sia quadrato, anche il secondo sarà quadrato.

Sieno i numeri quadrati 36. e 64., e sieno ancora altri due numeri quadrati, cioè 9. e 16. l' istessa ragione che passa tra 36. e 64. quella ancora passa tra 9. e 16. perchè tanto tra 36. numero quadrato, e 64. numero quadrato passa un medio proporzionale, ch'è il 48. Imperciocchè diviso il 36. in tre parti, il 12. è una parte la quale unita al 36. fa 48. indi diviso il 48. in tre parti il 16. è una parte che unita al 48. fa 64. e così ancora il 9. diviso in

in tre parti, il 3. è una parte il quale unito al 9. fa 12. e diviso il 12. in tre parti il 4. è una parte che unita al 12. fa 16. Dunque i quadrati 36. e 64. hanno per numero medio il 48. ed il 9. parimente quadrato, ed il 16. hanno per numero medio proporzionale il 12. ed 36. 48. 64. abbiamo dimostrato abbastanza.

9. 12. 16.

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se due numeri hanno tra di se quella ragione che passa tra cubo e cubo, ed il primo sia cubo, anche il secondo sarà cubo.

SIeno i numeri cubi 8. e 27., e 64. e 216. cadano tra questi due Medj proporzionali, e sono 12. e 18.; perchè metà di 8. e 4. che unito al 8. fa 12. metà di 12. è 6. che unito al 12. fa 18. metà di 18. è 9. che unito al 18. fa 27., e, come già abbiamo detto, i due Medj proporzionali sono 12. e 18. come anche tra 64. e 216. vi sono due Medj proporzionali, e sono 96. e 144. perchè metà di 64. e 32. che unito al 64. forma 96. metà di 96. è 48. che unito al 96. fa 144. e metà di 144. è 72. che unito a 144. fa 216. e la medema ragio-

ragione essendo tra due numeri, che ha il numero cubo al numero cubo, il primo poi sia cubo, e cubo sarà anche il secondo.

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXV.

I numeri piani simili hanno tra di se quella ragione la quale ha il numero quadrato al numero quadrato.

SIeno i numeri piani simili 20. e 45. dico che hanno l'istessa ragione che passa tra quadrato e quadrato, come sarebbe 4. e 9.; Hanno i detti numeri piani simili un medio proporzionale ch'è il 30. ed il 4. e 9. quadrati hanno un medio proporzionale, ed è il 6. e 9. sono minimi in ragione di 20. 30. e 45. Dipoi metà di 20. è 10. che unito al 20. fa 30. metà di 30. e 15. che unito al 30. fa 45. e questa medesima ragione hanno i quadrati 4. e 9. perchè metà di 4. è 2. che unito al 4. fa 6. metà di 6. è 3. che unito al 6. fa 9. e quì si vede chiaramente che i numeri piani simili hanno quella ragione che passa tra quadrato e quadrato.

TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXVI.

I numeri solidi simili hanno tra di se quella ragione che passa tra cubo e cubo.

SIeno due numeri solidi simili 240. e 810. dico avere l' istessa ragione che ha qualsivoglia cubo a qualsivoglia cubo, e 240. 810. numeri solidi simili hanno due Medj proporzionali, e sono 360. 540. Vi sono ancora quattro numeri di continua proporzione in ragione minima di 240.360.540. 810. e sono 8.12.18.27.

240.	360.	540.	810.
8.	12.	18.	27.

dico esser di continua proporzione, perchè moltiplicato 8 per 30 fa 240. ancora moltiplicato 12. per 30. fa 360. moltiplicato 18. per 30. fa 540. e 27. per 30. fa 810. dico poi avere l'istessa ragione i numeri solidi simili che ha il numero cubo al numero cubo, perchè metà di 240. è 120. che unito a 240. fa 360. metà di 360. e 180. che unito a 360. fa 540. metà di 540. è 270. che unito a 540. fanno 810.

ELEMENTO IX.

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Se due simili piani numeri scambievolmente moltiplicandosi facciano un altro, il prodotto sarà quadrato.

DUE numeri piani simili 6. e 54. moltiplicandosi fra di loro facciano 324. dico che 324. è numero quadrato; e moltiplicando 6. per sestesso fa 36. pure numero quadrato; sicchè il 6 al 36. ha la medesima ragione che ha il 36. al 54. perchè 6. per 9. fa 54., e 36. per 9. fa 324. Dico che tra 36. e 324. cade un medio proporzionale, ed è 108. dunque sono 36. 108. 324. continui proporzionali perchè 36. moltiplicato per 3. fa 108.; 108. moltiplicato per 3. fa 324. e 36. e 324. dico essere ambedue quadrati, e chiaramente abbiamo dimostrato che due numeri piani simili moltiplicandosi il loro prodotto sarà quadrato.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se due numeri scambievolmente moltiplicandosi fanno un quadrato, questi numeri saranno piani simili.

DUE numeri 6. 54. moltiplicandosi fra di loro fanno 324. quadrato, dico che 6. 54. sono numeri piani simili: dipoi 6. moltiplicato per sestesso fa 36. quadrato; dico che l' istessa ragione che ha il 6. al 54. abbia il 36. al 324. perchè chiaramente si vede che 9. per 6. fa 54. e 36. per per 9. fa 324. dunque quando due numeri scambievolmente si moltiplicano, e che formano un quadrato, essi sono piani simili.

TEOREMA III.

PROPOSIZIONE III.

Sè un numero cubo moltiplicando sestesso forma qualche numero, il prodotto sarà cubo.

FA 8. cubo moltiplicato per sestesso 64. dico il 64. esser numero cubo 8 4.

16. 2.

32. 1.

64.

ed

ed il 2. è lato del 8. cubo: indi 2. moltiplicato per sestesso fa 4., e 2. in 4. fa il cubo 8. il 2. è misurato dall'unità: e come l'unità misura il 2. così il 2. misura il 4., e come il 2. misura il 4. così il 4. misura l'8. e la ragione che ha il 2. al 4. quella istessa ha il 4. al 8. perchè due volte 2. fa 4. e due volte 4. fa 8., di più dico che tra l'unità e 8. passano due. Medj proporzionali, e sono 4. e 2. così anche il 64. è misurato dal 8. perche 8. moltiplicato per 8. forma 64. e otto unità misurano l'8., e otto volte 8. misura 64. e come tra l'unità e 8. cadono due numeri proporzionali, che gia abbiamo detto, essere 4. e 2. così tra 8. e 64. cadono pure due Medj proporzionali, e so 16. e 32., e 8. e 64. sono ambedue numeri cubi, ed abbastanza abbiamo dimostrato che un numero cubo moltiplicato per se steiso formi un altro numero cubo.

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Se un numero cubo moltiplicando un altro numero cubo farà qualche numero, il fatto sarà numero cubo,

SIA dal cubo 8. nel cubo 27. vale a dire moltiplicato 27. per 8. fa 216. numero cubo, e moltiplicato 8. per sestesso fa 64. anche numero cubo. Dunque 8. moltiplicato per 8.

fa 64. e 8. moltiplicando 27. fa 216. e farà come 8. a 27. così 64. a 216. perchè 8. entra tre volte in 27. così 64. entra tre volte in 216. e chiaramente si vede che un numero cubo moltiplicato per un numero cubo, il fatto farà cubo.

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE V.

Se un numero cubo moltiplicando qualche numero fa un cubo: ancora il moltiplicato sarà cubo.

SIA dal numero cubo 8. moltiplicato il numero 27. farà 216. pure numero cubo: dipoi moltiplicando 8. per sestesso fa 64. anche numero cubo, e la ragione che passa tra 8. e 27. cubi l'istessa ragione passa tra 64. e 216. parimente cubi; perchè 8. entra tre volte in 27. e 64. entra tre volte in 216. ed abbiamo 8. 27. 64. 216. tutti quattro numeri cubi.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VI.

Se un numero moltiplicando sestesso farà un cubo, ancora esso sarà cubo.

MOltiplicato per sestesso 8. farà 64. ambedue numeri cubi: dipoi moltiplicato

8. per

8. per 64. farà 512. numero cubo. Dunque se un numero moltiplicando sestesso farà un numero cubo, chiaramente si vede esser esso numero cubo. Dipoi tra 8. e 64. vi passano due Medj proporzionali, e sono 16. e 32. perchè 8. e 8. fa 16. ed anche 16. e 16. fanno 32., 32. e 32. fanno 64. Dunque i Medj proporzionali tra 8. e 64. sono 16. e 32. e similmente tra 64. e 512. passano ancora due Medj proporzionali perchè 64. e 64. fanno 128. ed ancora 128. e 128. fanno 256. conseguentemente 256. 256. fanno 512. Dunque i Medj proporzionali tra 64. e 512. sono 128., e 256.

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE VII.

Se un numero composto moltiplicando qualche numero formerà un altro, il fatto sarà solido.

IL numero composto 6. se moltiplica il numero 11. fa 66. dico che il 66. è numero solido perchè il numero 6. è composto da 2. e 3. volendo dire che 2. per 3. fa 6. dunque il numero 66. si chiama numero solido perchè viene composto da tre numeri fra loro moltiplicati.

TEO-

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se saranno dall'unità in poi quanti si voglia numeri continui proporzionali, il terzo certamente dall'unità è quadrato, e uno intermettente tutti: il quarto poi è cubo, e due intermettente tutti: il settimo anche è cubo, ed insieme è quadrato, e cinque intermettente tutti.

Sia dall'unità una continua proporzione unità 3. 9. 27. 81. 243 729. 2187. 6561. 19683. 59049. 177147. 531441.

dico che il terzo dall'unità cioè il 9. sarà quadrato, ed uno intermettente ch' è il 3. il quarto sarà cubo cioè il 27. ed ancora due intermettenti; e sono 3. e 9. ed ancora 729. sarà quadrato è cubo insieme, e ne avrà cinque intermettenti, e sono 3. 9. 27. 81. 243. intermettenti; intendo dire tutti quelli che passano tra l'unità e quel dato numero come tra l'unità e il 9. e così degli altri.

Di più dico che come è l'unità al 3. così è il 3. al 9. perchè l'unità misura il 3. con tre unità, ed il 9. è misurato con tre 3. perchè

chè tre volte 3. fa 9. dico il 9. esser numero quadrato: imperocchè tre numeri di continua proporzione che sono 9. 27., e 81. essendo quadrato il primo come il 9. ch' è quadrato sarà ancora il terzo cioè l'81. quadrato, ed anche altri tre di continua proporzione 81. 243. 729., 81. sarà quadrato come anche 729. è quadrato.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Se dall' unità vi saranno quanti si voglia numeri continui proporzionali, e quello appresso l' unità sia quadrato, ancora tutti gli altri saranno quadrati: ma se quello appresso l' unità sia cubo, anche tutti gli altri saranno cubi.

Sia dall' unità una continua proporzione. Unità 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. dico che siccome il primo appresso l' unità cioè il 4. è quadrato, così tutti gli altri sono quadrati. E che sia quadrato il 4. è chiaro poichè 2. per 2. fa 4. e così anche il 16. perchè 4. per 4. fa 16. e così 16. per 16. fa 256., e 32 per 32. fa 1024., e 64 per 64. fa 4096. Che sieno di continua proporzione si mostra chiaramente che 1. per 4. fa 4., 4. per 4. fa 16. 4. per 16. fa 64. e 4. per 64. fa 256., e 4. per

256.

256. fa 1024., e 4. per 1024. fa 4096.

Se poi il numero proſſimo all' unità foſſe cubo, come ſarebbe 4. 64. 512. 4096. dico che gli altri appreſſo ſaranno cubi perchè 8. numero cubo, 64. pure uumero cubo, e 512. e 4096. ſono tutti numeri cubi, poichè 2. per 2. fa 4., e 2. per 4. fa numero cubo, 4. per 4. fa 16. e 4. per 16. 64. parimenti numeri cubi: dipoi 8. per 8. fa 64. e 8. per 64. 512. parimente cubo.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE X.

Se dall' unità vi ſaranno quanti ſi vogliano numeri continui proporzionali, e quello appreſſo l' unità non ſia quadrato, nè anche alcun altro ſarà quadrato fuori che il terzo dall' unità, e tutti intermettenti uno: e ſe quello appreſſo l' unità non ſia cubo, neppure alcun altro ſarà cubo, fuori che il quarto dall' unità, e due intermettenti tutti.

SIeno dall' unità quanti ſi voglia numeri di continua proporzione unità, 2, 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256., ed il primo vicino all' unità cioè 2. non ſia quadrato, dico che nemmeno gli altri ſaranno quadrati, fuori che il terzo dall' unità, e tutti intermettenti uno, cioè a dire uno sì, e uno nò; e chiaramente ſi vede

de che il 2. non è quadrato, ed il 4. è quadrato: l'8. non è quadrato, ed il 16. sì, 32. non è quadrato, e 64. sì, 188. non è quadrato, e 256. sì.

Se poi quello appreſſo l'unità non è cubo, nemmeno gl'altri ſaranno cubi, fuori che il quarto dall'unità, ch'è 8. e due intermettente tutti, che vuol dire uno sì, e due nò.

TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XI.

Se dall' unità vi ſaranno quanti ſi voglia numeri continui proporzionali, il minore miſura il maggiore per qualcheduno di quelli, i quali ſono nei numeri proporzionali.

SIeno dall' unità qualſivoglia numeri di continua proporzione cioè unità 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. il minore 27. miſura il maggiore 2187. e come è il 27. al 2187. così è l'unità al 81. perchè 81. è compoſto di 81. unità così il. 2187. è compoſto di ottantuno volte 27., e come il 9. è compoſto di nove unità, così 243. e compoſto da nove volte 27. e come il 9. è compoſto da nove volte 81.

TEO.

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XII.

Se dall'unità sarannno quanti si voglia numeri continui proporzionali, qualunque de' primi numeri misurino l' ultimo, i medesimi ancora misureranno quello ch' è prossimo all' unità.

SE sono dall' unità quanti si voglia numeri di continua proporzione, come sarebbe unità 10. 100. 1000. 10000. dico qualunque numero misura il primo prossimo all' unità, misura l' ultimo, ed anche misura tutti che passano dall' unità, e l' ultimo,

10.	100.	1000.	10000.
5.	20.	200.	2000.

Dunque come il 5. misura il 10. due volte, il 100. venti volte, perchè 5. per 20. fa 100. così il 1000. duecento volte, perchè 5. per 200. fa 1000., il 10000. due mila volte, perchè 5. per 2000. fa 10000.

TEO-

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIII.

Se dall' unità saranno quanti si voglia numeri conti ui proporzionali, e quello ch'è appresso l' unità sia primo, niun altro misurerà il numero massimo, fuorchè quelli che sono nei numeri proporzionali.

Sieno dall' unità qualunque numeri proporzionali unità, 5. 25. 125 625. dico che se quel ch' è prossimo all' unità sarà numero primo, nessun altro misurerà il numero massimo, fuor che quelli che sono nei numeri proporzionali; perchè il 25. non lo misura altro che il 5., e chiaramente si dimostra che 5. per 5. fa 25., e 5. per 25. fa 125., ed anco 5. per 125. fa 625. e se poi il numero prossimo all' unità, fosse un altro numero primo, come per esempio il 3. si farebbe unità; 3. per 3. fa 9. e 3. per 9. fa 27. e 3. per 27. fa 81. dico che il numero massimo che al nostro esempio è 81. non lo misura altro che quei numeri, che sono i numeri proporzionali, e chiaramente si vede che 81. non lo misura altro che 3. 9. 27. perchè 3. per 3. fa 9., 3. per 9. fa 27. e 3. per 27. fa 81. dipoi 3. per 27. fa 81, 9 per 9. fa pure 81. e chiaramente abbiamo dimostrato, che essendo il numero prossimo all' unità numero

mero primo, il massimo numero non è misurato altro che da quei numeri che sono nei numeri proporzionali.

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

Se un minimo numero lo misurano numeri primi, nessun altro numero primo misurerà quello, fuorchè quelli che da principio lo misuravano.

SIA il numero 30, minimo di tutti quelli che hanno la medesima raggione con esso: dico minimo, perchè non v'è altro numero prima del 30. che sia misurato da 2., 3. e 5. dunque il 30. è misurato da 2., 3. e 5. numeri primi dico che nessun altro numero primo lo misura fuorche questi che lo misurano sul principio: perchè due volte 15. fa 30., tre volte 10. fa 30., cinque volte 6. fa 30., e chiaramente si vede che nessun altro numero primo lo misura, come il 7. pure numero primo non lo misura, e così l' 11. il 13. il 17. il 19. il 23. il 29. niuno di questi lo misura, ed abbiamo dimostrato abbastanza.

TEO-

TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XV.

Se tre numeri continui proporzionali saranno minimi di tutti quelli che hanno la medesima ragione con essi qualsivoglia due composti, saranno primi all' altro.

Sieno tre numeri 9. 12. 16. continui proporzionali perchè 9. diviso in tre parti, una terza parte è 3. che unito al 9. fa 12. e dipoi 12. diviso in tre parti, una terza parte è il 4. che unito al 12. fa 16., e questi sono minimi di tutti quelli che hanno la medesima ragione con essi perchè prima di essi non vi è alcun numero che sia misurato dal 4. e 8. come è il 16. da 4. e 3. come è il 12. nemmeno dal 3. solo come è il 9., e 9. e 12. fanno 21. ed il 21. rispetto al 16. sarà numero primo perchè non vi è altro numero che misuri il detto 16. e 21. che la sola unità. Di più dico che se 9. e 16. si sommano insieme, fanno 25. dico il 25. esser primo al 12. perchè non ha il 25. altro numero che lo misuri ugualmente al 12. che la sola unità, ed ancora se fosse 12. e 16. che fanno 28. dico il 28 rispetto al 9. non avere altra commune misura che la sola unità.

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVI.

Se due numeri saranno primi tra di se, non sarà come il primo al secondo, così il secondo ad alcun altro.

SIeno primi tra di se i numeri 4. e 7. dico che la ragione che ha il primo cioè il 4. al secondo ch'è il 7. non ha il detto 7. ad alcun altro; perchè il 4. diviso in due parti, o sia per metà, la detta metà è 2., ed il 7. contiene il 2. tre volte, e ne avanza una settima parte; dunque non si può trovare un numero che contenga tre parti di 7. col medemo avanzo.

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XVII.

Se saranno quanti si voglia numeri continui proporzionali, gli estremi di loro sieno primi tra di se, non sarà come il primo al secondo così l'ultimo ad alcun altro.

SIeno continui proporzionali qualunque numeri 8. 12. 18. 27. dico 8. e 27. esser primi tra di se perchè non hanno altro numero di commune misura che la sola unità. E che

sieno

fieno continui proporzionali chiaramente fi mostra che la ragione che ha l'8. al 12. ha il 12. al 18., ed anche ha il 18. al 27. che poi la ragione che ha 8. al 12. non l'ha il 27. ad alcun altro perchè la ragione del 8. al 12. è che la metà di 8, è 4. che unito al 8. fa 12. Dunque non può avere l'isteffa ragione il 27. ad alcun altro numero: perchè il 27. non fi può dividere per metà come l'8., e confeguentemente non potendo dividerlo per metà, non gli fi può aggiungere la metà, e formare un altro numero.

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE XVIII.

Dati due numeri confiderare fe fi può ritrovare il terzo numero proporzionale ad essi.

PER trovare da due numeri proporzionali il terzo proporzionale fieno i due numeri 4. e 6. dico che l'isteffa ragione che ha il 4. al 6. abbia il 6. al 9. perchè il 4. divifo in due parti, il 2. n'è una parte, che unito al 4. fa 6. dunque divifo il 6. in due parti, metà è il 3. che unito al 6. fa 9. ed il 9. è certamente il terzo numero proporzionale. Di più dico effer 9. il terzo numero proporzionale, perchè la ragione che ha il 4. al 6., quella medema tiene il 6. al 9., e chiaramente fi vede

 che

che il 6. diviso in tre parti, il 4. ne contiene due, e diviso il 9. in tre parti, il 6. ne contiene due. Dico di più che se i due numeri fossero primi tra di se, non si potrebbe trovare il terzo proporzionale. Per esempio fosse 4. e 7. la metà di 4. unita al detto 4. non può comporre il 7. e conseguentemente la metà di 7. non si può prendere, ed unirla al 7. per trovare un altro numero, perchè il 7. non si può dividere per metà.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE XIX.

Dati tre numeri considerare se si può ritrovare il quarto numero proporzionale ad essi.

Sieno tre numeri di continua proporzione 8. 12. 18. per ritrovare il quarto numero proporzionale dico che come è 8. a 12. così 12. a 18,, e così 18. a 27. che il 27. è il quarto numero proporzionale, perchè 8. metà è 4. che unito al 8. fa 12. metà di 12. è 6. che unito a 12. fa 18. metà di 18 è 9. che unito a 18. fa 27. quarto numero proporzionale. E per conoscere se i quattro numeri sieno proporzionali, si osservi che la somma degli Estremi sia uguale alla somma de' Medj, cioè 8. 12. 18. 27. dico che 8. e 27. Estremi moltiplicandosi fra loro fanno la somma di 216. e così moltiplicando 18. per 12. numeri Medj fanno anche la somma di

216.

216. e qui abbiamo ſpiegato abbaſtanza queſto Problema.

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

I primi numeri ſono molti, propoſta tutta la moltitudine de' numeri primi.

Sieno propoſti qualunque numeri primi come 2. 3. 5. per ritrovare da queſti, altri numeri primi ſi cerchi ritrovare da due, tre, o quattro numeri primi altri numeri primi. Se foſſero i già detti numeri 2. 3. 5. ſi faccia due volte 3. fa 6., e 5. che fa 11. numero primo. 2. e 3. fa 5. e 2. fa 7. pure numero primo. 2. e 5. fa 7. e 7. fa 14. e 3. fa 17. pure numero primo, e così in qualunque altro modo.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Se ſi compongono qualunque numeri pari, il tutto ſarà paro.

Sieno i numeri pari 4. 8. 16. 32. dico che eſſendo i detti numeri pari, la ſomma di' loro ch'è 60., ſarà parimenti numero paro. Ed in fatti qualunque numero ſi può per metà dividere, egli è paro. Dunque ſommati qua-

lunque numeri pari, la somma sarà para.

TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XXII.

Se si compongono quanti si voglia numeri impari, e la moltitudine di loro sia pari, il tutto sarà pari.

SE si compongono diversi numeri impari come 5. 7. 11. 15. e che la moltitudine di essi sia para. sommati tutti, la detta somma sarà para. Se poi la moltitudine de' numeri fosse impara, la somma che ne risulta sarà impara.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXIII.

Se si compongono quanti si voglia numeri impari, e la moltitudine di essi sia impara, il tutto sarà imparo.

SIeno qualunque numeri impari, e che la loro moltitudine sia impara come 5. 3. 9. i quali sommati insieme formano 17. dunque la somma dei detti numeri è impara, e se fosse qualunque quantità de' numeri impari, la loro Somma sarà impara, come di già abbiamo detto abbastanza.

TEO-

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se dal numero paro si leva il paro, il resto sarà paro.

LEvando dal numero 20. il numero 4. resterà il numero 16., e 20. 4., e 16. sono tutti numeri pari, e se da qualunque numero paro si leva qualunque numero paro, quel che resta sarà paro.

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXV.

Se dal numero imparo si leva un numero imparo il restante sarà paro.

SIA un numero imparo come fosse 17. al quale gli leveremo un numero imparo per esempio 5. e resterà 12. numero paro, e se dal detto 17. leveremo il numero 7. resterà 10. numero paro, è così da qualunque numero imparo se si toglie un numero imparo, il restante sarà paro.

TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se da un numero paro si leva un numero imparo, ancora il resto sarà imparo.

SE da un numero paro come fosse 14. leveremo un numero imparo per esempio il 3. resterà 11. numero imparo: e se da detto 14. leveremo 5. resterà 9. parimente numero imparo. E se poi dal 14. leveremo l'unità cioè 1. il restante sarà 13. parimente numero imparo. E chiaramente si vede che dal numero paro levato un numero imparo, il restante sarà imparo.

TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se un numero imparo moltiplica un numero paro, il fatto sarà paro.

SIA un numero imparo 7. il quale si moltiplichi per 4. numero paro, il resultato sarà 28. numero paro, e così di ogni altro numero imparo, il quale moltiplicato per un numero paro produrrà un numero paro.

TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Se un numero imparo moltiplicando un numero imparo farà un altro, il fatto sarà imparo.

SIA qualunque numero come fosse 7. numero imparo; moltiplicando un altro imparo come fosse 5. che 7. per 5. fa 35. parimente numero imparo: sicchè qualunque altro numero imparo moltiplicato per qualunque altro numero imparo, il prodotto sarà imparo: e così un numero imparo moltiplicato per sestesso farà un numero imparo.

TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXIX.

Se un numero imparo misura un numero paro, ancora misurerà la metà di quello.

SIA dunque qualunque numero paro, per esempio il numero 20. che lo misura il numero 5. ed il 5. misura ancora il numero 10. ch' è metà di 20., e così qualunque numero paro misurato da un numero imparo, misura ancora la metà.

TEOREMA XXVIII.

PROPOSIZIONE XXX.

Se un numero imparo sarà primo rispetto a qualche numero, ancora sarà primo rispetto al doppio di quello.

L'Imparo numero 5. è primo rispetto al numero 8. dico essere il numero 5. primo al numero 16. ch'è doppio del numero 8. e così se fosse 13. numero primo rispetto al 17. dico che detto 13. sarà anche primo rispetto a 34. essendo 34. doppio di 17.

TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXI.

Dei numeri dupli incominciando dal binario ciascheduno è solamente paro paro.

INcominciando dal numero binario cioè dal 2. e raddoppiando, come sarebbe 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. dico esser questi numeri pari pari, perchè sono misurati dalli numeri pari, come il 4. dal 2., l'8. da 2. e 4. il 16. da 2. 4. e 8., il 32. da 4. 8. 2. il 64. da 4. 8. e 2. &c. e così degli altri, e perciò chiamansi numeri pari pari.

TEO-

TEOREMA XXX.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Se un numero abbia la metà impara sarà solamente paro imparo.

SIA il numero 10. del quale la metà è 5. numero imparo, dico essere il 10. paro imparo; perchè è misurato dal 2. numero paro, e dal 5. numero imparo, e se vi sono numeri di continua proporzione, come sarebbe

6.	10.	14.	18.	22.	26.	30.	&c.
3.	5	7.	9.	11.	13.	15.	

dico esser parimenti i detti numeri dal 6. al 30. pari impari perchè hanno la loro metà impara, e sono misurati da numeri pari, e da numeri impari.

TEOREMA XXXI.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Se un numero paro non sia duplo del binario, ne abbia la metà impara, allora è paro paro, ed è paro imparo.

SIa il numero 24. il quale è paro imparo, perchè moltiplicando 3. per 8. fa 24. e perchè il 3. è numero imparo, e 8. è paro dico

co che quando il 24. è misurato da 3. e 8. è paro imparo: dipoi 4. per 6. fa anche 24. e quando il detto 24. è misurato col 6. e 4. è paro paro.

TEOREMA XXXII.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Se sieno quanti si voglia numeri continui proporzionali, si levino poi dal secondo, e dall' ultimo uguali ad esso primo: sarà come l' eccesso del secondo al primo, così l' eccesso dell' ultimo a tutti gli antecedenti ad esso.

SE sieno quanti si voglia numeri continui proporzionali come 8. 12. 18. 27. numeri continui proporzionali; si levi dal secondo ch' è 12. il primo 8. numero e dall'ultimo ch' è il 27. si levi parimenti il primo numero cioè l' 8. sarà come l' avanzo del secondo al primo, così l' avanzo dell' ultimo a tutti gli Antecedenti ad esso: perchè leviamo 8. da 12. avanza 4. ch' è metà del primo cioè del 8. e così leviamo 8. da 27. rimane 19.. Da detto 19. leviamo 4. ch' è metà del primo antecedente al 27. rimane 15.. Da 15. leviamo 6. ch' è metà del secondo cioè del 12. pure antecedente al 27. rimane 9. ch' è metà del terzo antecedente al 27. cioè del 18.. Sommati poi tut-

tutti gli Antecedenti del 27. cioè 8. 12. 18. fanno 38. ed il 19. è metà del 38. come il resto del secondo cioè al 4. ch'è metà del 8. così il resto dell'ultimo ch'è 19. è meta del 38. cioè di tutta la Somma.

TEOREMA XXXIII.

Proposizione XXXV.

Se quanti si voglia numeri dall'unità si espongono continui in doppia proporzione, fintantoche tutto il numero composto si faccia primo, e tutto questo in ultimo moltiplicato faccia un altro, il fatto sarà perfetto.

Sieno dall'unità qualunque numeri doppj unità 1. 2. 4. 8. 16. i quali formino sommati tutti insieme 31. numero primo, e 31. moltiplicato per 16. forma 496. dico il 496. esser numero perfetto. Dipoi 31. e 31. fanno 62, 62. e 62. fanno 124. e 124. e 124. fanno 248. e 248. e 248. fanno 496. Dunque quando dall' unità si espongono numeri continui in proporzione doppia, e che termini in numero primo la Somma dei numeri di continua proporzione doppia come unità 2. 4. 8. 16. che sommati fanno 31. numero primo allora moltiplicando il detto 31. per 16. ultimo de' numeri proporzionali, quel numero che produce sarà nu-

numero perfetto: come anche unità 2. 4. che sommati fanno il numero 7. quale numero 7. è primo, che moltiplicato per 4. forma 28. numero perfetto.

ELEMENTO V.

DEFINIZIONE I.

La parte è grandezza di grandezza, minore della maggiore, quando la minore misura la maggiore.

Questa prima Definizione ci mostra che la parte del numero è quando una parte minore misura la maggiore; vale a dire il 4. misura l'8., il 12. il 16. e così molti altri: come anche il 5. è parte del 10. del 15. del 20., e di tutti quelli che sono misurati esattamente dal 5.

La parte poi appresso i Mattematici è di due sorti: una misura il tutto, così che ripetuta alquante volte, forma il suo tutto. Tale è il numero 4. col 8. 12. 16. 20. L'altra poi non misura il suo tutto, ma alquante volte presa o l'avanza, o è mancante. Tale è il numero 4. col 6., 7., 9., 10. 18. 38. &c. La prima si suol chiamare parte aliquota, la seconda poi parte aliquanta. Euclide dunque in questo luogo definisce la parte aliquota solamente, sì perchè questa sola misura il suo tutto (imperciocchè la parte aliquanta non si dice

mi-

misurare il suo tutto) sì ancora, come in appresso costerà la parte aliquanta nei numeri da Euclide non si chiama parte, ma piuttosto parti; imperciocchè il numero 4. non è parte di questo numero 6., ma due terze parti, quali sono due binarj come anche 8. del 12. che detto 8. contiene due terze parti del 12., e così il 15. del 20., il quale contiene tre quarte parti del 20., e così degli altri.

Definizione II.

La parte maggiore dicesi moltiplice della minore, quando la minore misura la maggiore.

Come sarebbe il 10. si dice moltiplice del 5. perchè il 10. è composto da due 5., e così il 20. è moltiplice del 4. del 5. del 10. perchè il 20. contiene cinque volte il 4. è moltiplice del 5. perchè contiene quattro volte il 5. del 10. perchè contiene due volte il 10. Del resto quando due grandezze minori ugualmente misurino due altre maggiori, cioè una minore tante volte contenuta in una maggiore, quante volte l'altra minore è contenuta nell'altra maggiore diconsi queste due maggiori essere ugualmente moltiplici di quelle due minori. Il che si dirà ancora se più minori ugualmente misurino più maggiori, come sarebbe il 5. che misura il 25. come il 6. misura il 30. Dunque l'istessa ragione che ha il

5. al

5. al 25., ha il 6. al 30. perchè il 25. contiene cinque volte il 5., ed il 30. contiene cinque volte il 6. Dunque il 25. si dice ugualmente moltiplice del 5., come è moltiplice il 30. del 6.

Definizione III.

La ragione è una certa abitudine scambievole del medesimo genere rispetto alla quantità.

QUando due quantità del medesimo genere come due numeri, due linee, due superficie, o due solidi &c. tra di loro si paragonano secondo la quantità cioè secondo che una è maggiore dell'altra, o minore, o uguale, una tale comparazione, o abitudine scambievole si chiama ragione, oppure (come ad altri piano) proporzione. Pertanto se si paragona qualche linea con qualche superficie, o un numero con una linea, questa comparazione non si chiama proporzione; perchè nè la linea alla superficie, nè il numero alla linea sono quantità del medesimo genere. Similmente se si paragona qualche linea con un altra linea secondo la qualità; cioè che una sia bianca, e l'altra negra &c. quantunque ambedue sieno del medesimo genere, questa comparazione non si potrà chiamare proporzione, perchè non è secondo la quantità.

Benchè poi la proporzione propriamente si ritro-

trovi nelle sole quantità; ad ogni modo tutte le altre cose, le quali in certa maniera sono della natura di quantità come sono, i Tempi, i Suoni, le Voci, i Luoghi, il Moto i Pesi, le Potenze si dice ancora, che hanno la Proporzione, se la loro abitudine si considera secondo le quantità; come quando diciamo un Tempo esser maggiore, o minore di un altro tempo, o due tempi essere uguali; una simile abitudine si chiamerà proporzione; poichè i tempi allora si considerano come certa quantità. Del rimanente in ogni proporzione quella quantità, la quale si riferisce ad un altra, si dice da Euclide, e da altri Geometri *Proporzione antecedente*; quella poi alla quale l'altra viene riferita, diceci *Proporzione conseguente*, come nella proporzione di una linea di sei palmi alla linea di tre, la linea di sei palmi si dice antecedente di proporzione, e la linea di tre si dice conseguente di proporzione. Che se al contrario si considera la proporzione della linea di tre palmi, alla linea di sei, si chiamerà antecedente la linea di tre palmi, e conseguente la linea di sei palmi.

DEFINIZIONE IV.

La proporzione è una similitudine di ragioni.

QUello che in questo luogo gl' Interpetri chiamano proporzione, appresso i Greci si chiama *Analogia*; siccome dunque la com-

parazione di due quantità tra di se si dice proporzione, così la comparazione di due, o più proporzioni tra di se si suol chiamare *proporzionalità*, come se la proporzione della quantità 12. alla quantità 4. sarà simile alla proporzione della quantità 9. alla quantità 3. questa somiglianza che passa tra questa proporzione, si dice proporzionalità. In tal maniera sarà simile la proporzione di 16. a 8. alla proporzione di 8. a 4., e si chiama ancora proporzionalità. Molte somiglianze poi di proporzioni, o proporzionalità si descrivono da varj Autori, specialmente da Boezio, e Giordano, tra quali sempre ottennero il primo luogo presso gli Antichi la proporzione, o proporzionalità Aritmetica, Geometrica, Armonica, o Musica. La Geometrica è di due sorti una continua, nella quale ciaschedune quantità intermedie si pigliano due volte: così che non si fà alcuna interruzzione di proporzioni, ma qualsisia quantità intermedia sì antecedente, che conseguente, antecedente della quantità susseguente, e conseguente della quantità antecedente; come se si domanda che proporzione vi è tra 16. e 8., si trova esservi quella stessa, che vi è tra 8. e 4. Questa proporzionalità si chiama *continua*: l'altra poi dicesi *discreta*, e non continua, nella quale ciaschedune quantità intermedie si prendono una sol volta; così che si fà interruzzione di proporzione. Niuna quantità è antecedente e conseguente, ma solamente antecedente, o solamente conseguente, come

me sarebbe a dire quella proporzione, che passa tra 12. e 4., quella ancora passa tra 9. e 3., e questa proporzionalità si chiama discreta, e non continua.

Delle Divisioni delle Proporzioni.

LA Proporzione definita da Euclide si divide in Proporzione razionale, ed irrazionale. La razionale è quella, la quale si può dimostrare nei numeri, qual'è per esempio la linea di 20. palmi ad un altra di 10. palmi; imperocchè tale proporzione si dimostra in questi numeri 20., e 10.. La Proporzione irrazionale è quella la quale non si può dimostrare in numeri, com'è la proporzione di qualsivoglia diametro quadrato al lato del medesimo quadrato: poichè questa proporzione non si può ritrovare nei numeri. Altri dicono che la proporzione razionale sia quella, che hanno qualsivoglia due quantità commensurabili. La irrazionale poi è quella, che hanno qualsivoglia due qnantità incommensurabili. Si dicono poi quantità commensurabili quelle che hanno una commune parte aliquota, o quella, che lo misura una medema commune misura, come una linea di 20. palmi, e una linea di 8. palmi: imperocchè una linea di 4. palmi è parte aliquota dell'una e dell'altra. Similmente la linea di 2. palmi misura la linea di 20. così ancora le medeme linee sì di 4. che di 2. palmi misurano la linea di 8. palmi. Similmente

tutt' i numeri si dicono commensurabili, perchè li misura la sola unità. Le quantità incommensurabili poi si dicono quelle, le quali non hanno alcuna parte aliquota, nè veruna misura commune, come sono il diametro, ed il lato del medemo: perchè quantunque qualsivoglia di queste linee abbia infinite parti aliquote, come la metà, la terza, la quarta &c. tuttavolta niuna parte aliquota di una può misurare l'altra. Per tanto nei numeri si trova la sola proporzione razionale; ma nella quantità continua si contiene la proporzione tanto razionale, quanto irrazionale.

In altro modo si suol dividere la proporzione, cioè in proporzione di ugualità, e d'inugualità. La proporzione di ugualità è tra due quantità uguali come tra 10, e 10. 20, e 20. La proporzione d'inugualità si trova tra due quantità inuguali, come tra 25. e 15. tra 8. e 40. &c. anno poi questi due generi di proporzioni con i due superiori quella connessione, che ogni proporzione di ugualità ritiene, acciò sia necessariamente razionale: ma non al contrario. E' parimenti ogni proporzione irrazionale è proporzione d' inugualità; ma non al contrario. Di nuovo la proporzione d'inugualità (lasciamo la proporzione di ugualità; poichè più non si può dividere: quando che qualunque quantità uguali o grandi, o piccole hanno sempre la proporzione di ugualità) si suddivide in proporzione di maggiore, o minore inugualità. Quella di maggiore inugualità è quando

do la maggior quantità si paragona con la minore, com'è la proporzione di 20. a 10. &c. La proporzione di minore inugualità è quando la minore quantità si riporta alla maggiore, come quella di 10. a 20. Imperciocchè non è la medesima proporzione di 4. a 2. che di 2. a 4. ma molto fra di se differiscono, essendo molto differente l'uso dell'una dall'uso dell'altra.

Delle Proporzionalità.

LE Proporzionalità sono da Euclide definite, ed in più generi divise, o sieno chiamate medietà tanto le Aritmetiche, che le Geometriche, ed Armoniche.

Le Proporzionalità Aritmetiche, o Medietà sono quando tre, o più numeri sono progrediti per la Differenza, come questi numeri 4. 7. 10. 13. 16. de' quali ciascheduno supera di 3. il suo Antecedente.

Inoltre la Proporzionalità Aritmetica è di due sorti continua, e discreta. La continua è quando nella Progressione de' numeri non si fa alcuna interruzione, come si fa nel dato Esempio. La discreta è quando nella Progressione de' numeri accade interruzione, così che a due a due si rapportano tra di loro, e non qualsivoglia col prossimo antecedente come in questo esempio 4. 7. = 8. 11. = 30. 33. e la medema differenza, che passa tra 4. e 7. passa tra 8. e 11., e tra 30., e 33., cioè differenza di tre unità, che non già tra 7., e 8. passa la

 diffe-

differenza di tre unità, nemmeno tra 11., e 30.

La proporzionalità geometrica, o sia medietà è quando tre, o più numeri hanno la medesima proporzione, la quale certamente Euclide definisce: imperciocchè questa si dice propriamente proporzionalità, o veramente Analogia. L' altra poi impropriamente, non essendo sempre la medema proporzione tra i loro termini; così che più rettamente si devono dire medietà, mediante i termini Medj, i quali con certa ragione si frammezzano fra gli Estremi come questi numeri 2. 6. :: 18. 54. poichè qualsivoglia ha con il suo antecedente la medesima proporzione tripla, e costituiscono la proporzione Geometrica; ed ancora questa è di due sorti continua, e discreta. La continua si vede nei dati numeri. La discreta poi in questi sei che sieguono cioè 2. 3. 12. 18. 20. 30. imperciocchè questi a due a due solamente hanno la medesima proporzione.

Delle Proporzionalità Aritmetiche.

DAti due numeri, dei quali se al maggiore aggiungeremo la differenza che passa dal minore al maggiore, avremo il terzo termine in proporzione Aritmetica: e similmente dal terzo termine al quarto aggiungendo sempre la stessa differenza, che passa dal minore al maggiore, come 4. 11., che la differenza è 7. ed in tal modo si potranno avere nella Proporzionalità Aritmetica termini infiniti, come nell' esempio si vede 4.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. &c., ed chiaramente apparisce, che la differenza, che passa tra un termine, e l'altro è 7. Se poi dati due numeri sottrarremo la differenza che passa dal maggiore al minore, avremo di nuovo il terzo termine della Proporzionalità minore l'uno dell'altro: e se sottrarremo la medema differenza dal terzo, quel che resta sarà il quarto, o il minore della proporzionalità, ed in questa guisa ritrovaremo gli altri minori, sottraendo sempre la stessa differenza dall'ultimo ritrovato: siccome dati due numeri 38. e 34. la differenza essendo 4., si costituisce questa proporzionalità Aritmetica fino al numero 2. imperciocchè sottraendo dal 38. 4., rimane 34. e dal 34. sottraendo pure il 4. rimane 30., e da 30. sottraendo il 4. rimane 26., e così seguitando giungeremo al numero 2.; ed in questo modo avremo costituito la proporzionalità Aritmetica minore fino al 2., come in questo esempio si dimostra.

38. 34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

Dipoi se nella proporzionalità, che abbiamo distesa non si sottrae la differenza del maggiore al minore, cioè il 4. differenza del 38. al 34. ma si raddoppierà il 34. che forma 68., e dal 68. sottratto il 38. rimane parimente 30., come pure raddoppiato il 30. fa 60. e dal detto 60. sottratto il 34. rimane 26. come pure raddoppiando il 26 farà 52., che da 52. sottratto il 30. rimane 22., che raddoppiato fa

 44.

44., e sottratto da 44. 26., rimane 18., che raddoppiato fa 36., che da 36. sottraendo 22. resterà 14., e raddoppiato il 14. fa 28., che dal detto 28. se sottrarremo 18. rimane 10., che unito al 10. fa 20. dal 20. sottrarremo 14. rimane 6. e raddoppiando detto 6. farà 12., dal che sottratto 10. rimane 2.

Di nuovo dati due numeri se si raddoppia il minore, e dal resultato si sottragga il maggiore, quello, che resta è il terzo termine. Se poi raddoppiato il terzo termine sottraendo dal resultato il minore, quello che resta sarà il 4°., ed in questa guisa si farà fino a che si potrà sottrarre. Siccome dati due numeri 25. e 18. se raddoppiaremo il minore, cioè 18. farà 36., e sottratto da 36. il 25. rimane 11. terzo termine. Dipoi raddoppiando 11. farà 22. dal quale sottraendo 18. rimane 4; e se detto 4. si raddoppia fa 8.; e da 8. non si può sottrarre 11. dunque qui termina questa proporzionalità, come nell' esempio si vede. 25. 18. 11. 4. &c.

Quando il numero de' termini è imparo la Somma degli Estremi è uguale alla Somma del numero di mezzo raddoppiato, e sarà ancora uguale alla somma degl'altri termini sommati a due a due, come dall' esempio si vede:

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. &c.

Sommati 3. e 27. fanno 30., e sommati 7. e 23. fa pure 30., e sommati 11. e 19. fanno no anche 30. dipoi il 15. numero medio dei detti termini raddoppiato fa pure 30. e sieno

quan-

quanti si vogliano i termini di proporzionalità, purchè sia il numero dei termini imparo, sempre saranno le Somme nella data maniera.

Quando poi il numero de' termini sarà paro, la Somma degli Estremi è uguale alla Somma dei due Medj, e gli altri come sopra; ed eccone l'esempio. 3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31.

la Somma di 31. e 3. fa 34., ed ancora 7. e 27. fanno 34. come anche 11. e 23. fa 34. ed i due Medj che sono 15. e 19. fanno anche 34. Pertanto quando il numero de' termini sarà imparo, la medesima distanza che passa dal primo termine al medio termine, quella stessa passa dal mèdio termine all' estremo: e similmente la distanza che passa dal secondo termine al medio, quella stessa passa dal medio al penultimo termine; e così per ordine. Di più dico che essendo nove termini, la somma di tutt' i termini sarà moltiplice al termine di mezzo, come, nel nostro esempio si vede

6. 9. 12 15. 18. 21. 24. 27. 30. che il 18.

termine medio, moltiplicato per 9. numero de' termini forma 162. il quale 162. ha la proporzione moltiplice noncupla al 18., e detto 162. è la Somma di tutt' i termini presi insieme: ed ancora la Somma degli Estremi che sono 6. e 30. forma 36. la metà indicherà il numero medio di questi nove termini, cioè il 18. e così degli altri termini, il secondo col penultimo, cioè 9. e 27. che pure fa 36. co-

me il terzo al terzo ultimo, ed il quarto al quarto ultimo, che tutti formano 36. ed il 36. diceſi duplo del 18.

La Somma dunque di tutt' i termini di proporzionalità Aritmetica, il numero de' termini della quale è imparo, facilmente lo ritrovaremo, ſe moltiplicaremo la metà dell' aggregato degli Eſtremi per lo numero de' termini, come in queſta ſerie di undici numeri

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

La Somma degli Eſtremi 7. e 127. fanno 134., la di cui metà è 67., quale moltiplicato per 11. fa 737., e queſta è la Somma di tutti gli undici termini. Queſta ragione conviene ancora in quella proporzionalità, il numero de' termini della quale è uguale: ma quando la Somma degli eſtremi è diſuguale, (imperciocchè quando il numero de' termini è uguale, puol eſſere la Somma degli eſtremi diſuguale; ma non ſempre uguale) allora ſarà la ſua metà numero intiero con $\frac{1}{2}$.

Quando il numero de' termini ſarà paro, allora la Somma degli eſtremi moltiplicata per la metà de' termini, il reſultato ſarà la Somma di tutt' i termini, come in queſto eſempio ſi vede: 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. la Somma degli eſtremi cioè il 33. e 6. che formano 39. dico che il 39. moltiplicato per 5. ch'è la metà di 10. vale a dire, metà dei termini

for-

forma 195. e 195. è la Somma di tutti i termini presa insieme, ed anco se si sommano gli altri termini a due a due, come sarebbe 9. e 30. fa 39. e così 12. e 27. fa 39., 15. e 24. fa pure 39., e 18. e 21. anche fa 39. e questo succede, quando le differenze sono uguali, come in questo esempio si vede, che questi termini hanno la differenza di 3.

Se nella proporzionalità Aritmetica di quanti si voglia termini conosciamo un estremo, il numero de' termini, è la differenza, ritrovaremo l'altro estremo in questa maniera: moltiplicaremo il numero prossimo minore al numero de' termini nella data differenza, ed aggiungeremo il prodotto al minore estremo cognito, o detrarremo il medesimo numero prodotto dal maggiore Estremo: imperocchè così faremo il maggiore Estremo che si cerca; questo altro poi si farà minore Estremo incognito; verbi grazia se si propone un numero minore estremo cognito, come fosse 4. il numero de' termini fosse 12. e la differenza 5. moltiplicaremo 11. numero prossimo minore al numero de' termini per la differenza data 5., il prodotto è 55. aggiungeremo 4. all' Estremo, è la Somma dunque è 59., ed il 59. sarà il maggiore Estremo, come in questi 12. termini è manifesto, la cui differenza è 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Se poi vorremo trovare il minore estremo, prenderemo il numero minore prossimo de' ter-

mini cioè 11., e lo moltiplicaremo per la differenza 5., ed il prodotto sarà 55. Dipoi dall' ultimo Estremo 59. sottrarremo il detto 55., e resterà 4. quale sarà il minore Estremo nei 12. termini con la differenza 5.

Vi voglio spiegare un altra gioconda Operazione per costituire quanti Medj proporzionali si vogliano. Fra due numeri l' uno e l' altro si partiscono per il numero prossimo maggiore de' Medj che si costituiscono. I quozienti si segnano: dipoi si sale tanto all' uno, che all' altro per continua loro addizione, aggiungendo sempre il quoziente avuto dalla partizione tante volte, quanti Medj si sono costituiti, e così si avranno due proporzionalità Aritmetiche, come in questo Esempio si vede esposto, che se volessimo quattro termini Medj proporzionali Aritmetici tra 25. e 30., il numero prossimo maggiore del 4. è il 5. Dunque il 5. in 25. vi entra cinque volte, ed in 30. il 5. vi entra sei volte: sicchè i quozienti sono 5. e 6. per costituire quattro Medj termini proporzionali Aritmetici si faccia così 5. e 5. fa 10. e 10. e 5. fan 15., e 5. e 15. fan 20. dipoi passando al numero 6. si farà nel medesimo modo 6. e 6. fa 12., 12. e 6. fa 18., e 18. e 6. fan 24. come nel presente Esempio si dimostra

25.	26.	27.	28.	29.	30.
20.					24.
15.					18.
10.					12.
5.					6.

Il 20. ſupremo nel primo Ordine, e l'infimo 6. del ſecondo Ordine formano 26. primo medio. Dipoi 12. e 15. forma 27. ſecondo medio, e 18. e 10. forma 28. terzo medio, come anche 24. e 5. formano 29. quarto medio, così nel primo ordine ſempre diſcendendo dal ſupremo ſino all'infimo, e dal ſecondo Ordine ſempre aſcendendo dall'infimo fino al ſupremo.

Si deve conſiderare con ammirazione che la differenza che paſſa tra i quozienti, e ſono i minimi numeri, cioè 5. e 6. che la differenza è 1., quella ancora paſſa tra i quattro termini Medj, perchè ſe dal maggiore, che nel noſtro Eſempio è il 6. ſottrarremo il minore, cioè il 5. reſterà 1., ed in queſta guiſa ſi potrà fare quando ſi deſiderano Medj proporzionali Aritmetici tra due numeri.

Delle Proporzionalità Geometriche.

I.

DAti due numeri si deve osservare quante volte il maggiore contenga il minore; cioè diviso il maggiore per lo minore, il quoziente moltiplicarà il maggiore, e si avrà il terzo termine. E se col medemo quoziente o sia denominatore moltiplicaremo il terzo termine, avremo il quarto. In questo modo si possono costituire infiniti termini, come dall' esempio si vede.

2. 8. 32. 128. 512. 2048. &c.

e qui si vede che 8. contiene il 2. quattro volte. Dunque moltiplicato 8. per 4. forma 32. indi moltiplicato 32. per 4. forma 128. e moltiplicato 128. per 4. farà 512., e 512. moltiplicato per 4. farà 2048., e così in infinito. Ed in questo modo si troveranno quanti termini si vorranno proporzionali geometrici.

I I.

Quando il numero de' termini continui proporzionali è disparo, il numero generato dalla moltiplicazione degli estremi tra di se è uguale al numero, il quale si genera dalla moltiplicazione tra di se di qualsivoglia due ugualmente distanti dagli estremi, e da quello ancora il qua-

quale si produce dal medio per se stesso moltiplicato, come in questi cinque numeri proporzionali ∺ 16. 24. 36. 54. 81.

Tanto dal 16. in 81., o sia 81. moltiplicato per 16., quanto il 54. moltiplicato per 24. come ancora il 36. moltiplicato per se stesso, vien prodotto il numero 1296.

Quando poi il numero de' termini proporzionali sarà paro, se moltiplicaremo sì li due estremi, che il secondo termine col penultimo, ed il terzo termine con il terzo ultimo, e così degli altri, se ve ne sono, formeranno un istessa somma, come in questo Esempio si vede 3. 6. 12. 24. 48. 96.

---

tanto 96. moltiplicato per 3., come 48. per 6., e 24. per 12. fanno la somma di 288.

Se tra due numeri costituiremo un medio proporzionale geometrico; se questi si moltiplicheranno fra di se, e dai numeri procreati se ne estragga la radice quadrata, come in questi due dati numeri 6. e 96. che moltiplicato 96. per 6. si forma il numero 576., la di cui radice quadrata è 24., e sarà proporzionale nel luogo di mezzo tra i dati numeri in questa maniera 6. 24. 96. Imperciocchè il 96. al 24. ha proporzione quadrupla, la quale ancora ha il 24. al 6. Pertanto se tra due dati numeri si deve costituire un numero medio razionale, il quale possa esprimersi, è necessario che il numero prodotto dalla moltiplicazione dell' uno nell' altro sia quadrato: poichè se non è quadra-

drato, non avrà radice nei numeri; ma la sua radice sarà quel numero il quale gli Aritmetici chiamano *Assurdo*, o sia irrazionale, come in questi due numeri 7. e 9., si fa dalla moltiplicazione dell' uno nell'altro il numero 63., il quale non hà radice. Diremo dunque che la radice quadrata del numero 63., la quale certamente non si può esprimere in numeri sia nel luogo di mezzo proporzionale tra i dati numeri 7. e 9. in questa maniera 7. $\surd$ quadrata del 63., la quale radice del 63. è 49. perchè si deve prendere il quadrato del 7. ch' è il 49. quadrato più prossimo al 63. ma deve essere primo del dato numero, perchè altrimenti sarebbe il 64. più prossimo al 63.

Se alcuno vuole ritrovare tre numeri in proporzionalita Aritmetica tra primo e secondo, secondo e terzo, de' quali nasca un medio proporzionale Geometrico, si farà in questa maniera. Si pigliano tre numeri qualunque, de' quali il secondo sia quintuplo del primo, ed il terzo sia settuplo del medesimo primo: imperciocchè i numeri quadrati di questi saranno Aritmetici proporzionali: ed il primo numero preso, e moltiplicato per lo secondo, produrrà il medio proporzionale Geometrico tra il primo quadrato, ed il secondo in proporzione del primo numero presso al secondo, il secondo poi moltiplicato per lo terzo genera il medio proporzionale tra il secondo quadrato ed il terzo in proporzione del secondo e del terzo, la qual cosa cosa chiaramente si vede in questo esempio. La

Tre num. presi	Primo 8		Quint. del primo 40		Settuplo del primo 56
Qua. Arit met. prop.	64		1600		3136
Medj Geometrici		320		2340	

La differenza de tre quadrati è 1536., ed i Medj proporzionali tra loro sono 320., 2240., che vengono prodotti dalla moltiplicazione di 8. per 40., e 40. per 56.

Ritrovati poi tre quadrati Aritmetici proporzionali, se questi li moltiplicaremo per qualsivoglia medemo numero, o li divideremo per qualsivoglia parte aliquota, se l' hanno, anche i prodotti numeri, o quozienti saranno Aritmetici proporzionali tra il primo e secondo, secondo e terzo, de' quali si framezza un medio di Geometrica proporzionalità, i quali Medj si ritroveranno nella medesima maniera: cioè se i Medj ritrovati tra i quadrati si moltiplicano per lo medesimo numero, o si dividono per quella medema parte aliquota, come se i superiori quadrati insieme con i Medj proporzionali si raddoppiano, si genereranno questi numeri.

Se

Aritmet. proporz.	128		3200		6272
Medj Geometr.		640		4480	

Se poi si dividono i medesimi per 8. parti aliquote communi de' quadrati (imperciocchè qualunque parti aliquote dei quadrati sono ancora parti aliquote de' Medj) ed usciranno fuori questi numeri

Aritm. prop.	8		200		392
Medj Geomet.		40		280	

Questi numeri poi ritrovati in questa guisa, avranno sempre le medesime proporzioni, le quali hanno i quadrati, ed i Medj tra di se. Che se questi numeri, 8. 200. 392. divideremo per 4. ritrovaremo altri 2. 50. 98. Aritmetici proporzionali, tra quali cadono 10. e 70. Medj Geometrici; e se finalmente questi numeri 2. 50. 98. li partiremo per 2., avremo altri 1. 25. 49., tra quali i Medj Geometrici sono 5. e 35. Dove quì si vede con ammi-

mirazione, quando fra tre numeri di Aritmetica proporzione siano quadrati, o nò, cadono due Medj di proporzionalità Geometrica uno tra primo e secondo, l'altro tra secondo, e terzo, il quadrato del medio superiore, ed il quadrato del secondo numero della proporzionalità Aritmetica, ed il quadrato del medio posteriore, costituisce la proporzionalità Aritmetica, come nell'esempio posteriore di questi tre numeri 40. 200. 280. che sono 1600. 40000., 78400. avranno nell'Aritmetica proporzionalità la medema commune differenza di 38400. siccome &c.

Che per più chiara dimostrazione i detti numeri.

Aritmetici proporz.	128		3200		6272	
Medj Geometrici		640		4480		

Il 128. nasce dalla radice 4. che il quantuplo del 4. è 20. dal quale nasce il 32000., ed il settuplo del 4. è 28. per cui nasce il 6272., Ritornando alla spiegazione del 128. si cava il quadrato del 4. ch'è 16. perchè 4. per 4. fa 16., e parte aliquota del 16. è l' 8. come è ancora parte aliquota degli altri, che spiegaremo in appresso. Dunque il 16. moltiplicato per 8. forma 128.

Paſ-

Passiamo ora a dimostrare l' origine di 3200. Il 20. quintuplo del 4. lo moltiplicaremo per sestesso, e produce 400. ch' è il quadrato del 20., che detto 400. tiene pure per parte aliquota l' 8., che moltiplicato 400. per 8. formerà 3200., ed eccoci alla dimostrazione del 6272. Il 28. settuplo del 4. moltiplicato per sestesso forma 784. quadrato del 28., che tiene anche 8. per parte aliquota, e detto 784. moltiplicato per 8. forma la Somma di 6272.

Spiegarò ora l' origine de' Medj Geometrici 640. e 4480. Torniamo alla radice 4. che moltiplicata per 20. quintuplo di detto 4. formerà 80. Detto 80. moltiplicato per 8. farà 640. primo Medio Geometrico. Passiamo alla dimostrazione del secondo per trovare il secondo Medio Geometrico. Si moltiplica 28. settuplo del 4. per 20. quintuplo di detto 4. che produce la Somma di 560., e detto 560. moltiplicato per 8. parte aliquota commune, produce la Somma di 4480. secondo medio Geometrico.

Veniamo ora alla Spiegazione dei numeri divisi in otto parti aliquote.

Aritmetici Proporzion.	8.		200.		392
Medj Geometrici.		40		380	

Dun-

Dunque se divideremo 128. per 8. il quoziente sarà 16., che diviso per 2. il quoziente è 8. Lo stesso faremo del 3200. che diviso per 8. il quoziente sarà 400., il quale diviso per 2. il quoziente è 200., ed ancora 6272. diviso per 8. il quoziente sarà 784., che diviso per 2. il quoziente sarà 392.

Veniamo ora alla Spiegazione de' Medj Geometrici, che pure essi vanno divisi per 8., il quale di già abbiamo detto essere parte aliquota. Dunque 640. medio Geometrico diviso per 8. il quoziente è 80. che diviso per 2., il quoziente è 40. primo medio Geometrico delli detti numeri 8. 200. 392.

Veniamo ora al secondo Medio. Si divide 4480. parimente per 8., il quoziente sarà 560. che diviso per 2. ne viene il quoziente 280. secondo medio Geometrico.

La Proporzione consiste almeno in tre termini. Imperocchè tutta l' Analogia, o sia la Proporzionalità, o veramente Proporzione è una similitudine che passa tra due, o più quantità, come sarebbe tra 12. 4. :: 9. 3., 16. 8. 4. Perchè la ragione, o sia proporzione che passa tra 12. e 4. è simile a quella del 9. al 3. poichè diviso il 12. in tre parti, il 4. è una terza parte. Similmente il 9. diviso in tre parti, il 3. ne contiene una terza parte.

La Ragione poi che ha il 16. all' 8. quella istessa ha l' 8. al 4. perchè il 16. è doppio del 8., e 8. è doppio del 4.. Ed ancora se fossero più grandezze, come per esempio

81.

81. 54. 36. 24. 16. continui proporzionali. E quì la Proporzione che ha 81. al 54. quell' istessa ha il 54. al 36., ed il 36. al 24. ed il 24. al 16., perchè 81. diviso in tre parti il 54. ne contiene due parti. Dunque 54. contiene due terzi di 81., e così il 36. contiene due terzi di 54., ed il 24. contiene due terzi di 36. e così il 16. contiene due terzi di 24.

E qui spiegaremo cosa s' intenda per *Simpatìa* de' Numeri.

La Simpatìa è una proprietà occulta, e questo nome deriva dal Greco, e significa inclinazione naturale che vi è tra una cosa e l' altra; ed il suo contrario diceſi *Antipatìa*. Imperocchè alcune cose hanno un certo confronto di natura insieme, parendo che quasi come per una amicizia stieno insieme collegate; alcune altre poi sono così nemiche, che non si compatiscono fra loro, anzi si odiano. Questa simpatìa, ed antipatìa vedesi anche non senza ammirazione tra gli Uomini non solo, ma altresì tra Enti privi di ragione; come sarebbe tra Animali, Piante, e quel che più reca meraviglia tra numeri, e numeri. Ma quì non siamo al caso di spiegare questa simpatìa, ed antipatìa che passa tra Uomini, Animali, e piante; ma bensì la nostra mira è solamente di spiegare quella dei numeri.

Dirò dunque, che questo nome di simpatìa de' numeri, non si trova appresso veruno Autore che abbia scritto sopra tali materie: ma bensì dico questa Simpatìa de' numeri non essere

al-

altro che una Analogìa tra numero e numero, o sia Similitudine di ragione, volendo dire di uguali proporzioni: poichè ogni Analogìa, o Proporzionalità, la quale gl' Interpetri chiamano Proporzione, è la Similitudine di due o più Proporzioni. Ogni proporzione poi ha il termine antecedente, e conseguente, ed è necessario che in ogni proporzionalità si trovino per lo meno di due termini antecedenti, e due conseguenti. Laonde se la Proporzionalità sarà discontinua, o sia non continua, si ricercheranno almeno quattro termini: ma se sarà continua non puol esser meno di tre termini; poichè il termine medio si piglia due volte essendo conseguente termine di una Proporzione, ed Antecedente dell' altra. E questo è il minimo numero de' termini della Proporzionalità: poichè in due termini si ritrova solamente proporzione, e non proporzionalità. Dunque come si dice volgarmente, che ogni Simile appetisce il suo Simile: così anche nei numeri il simile al simile si adatta. Il che se succede tra numeri razionali, quelli hanno fra loro Simpatìa. Se poi al contrario sono numeri irrazionali, o sieno assurdi, volendo dire che non abbiano alcuna ragione fra loro, o pure che non vi sia proporzione, questi dicesi avere fra loro Antipatìa. E quì per ora cesso la Spiegazione di alcuni Elementi di Euclide, riserbandomi il resto nell' altra Opera, che, come gia ho detto, a Dio piacendo darò alla luce.

I L F I N E.


BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

